Analysis

1

Im hier folgenden Kapitel sind die typischen Aufgabenformate der Analysis dargestellt. Um diese zu lösen, musst du die Kompetenzen der Checkliste auf dieser Seite beherrschen. Übe gezielt spezielle Inhalte, die gerade Thema im Unterricht sind, hilfsmittelfreie Aufgaben, komplexe Klausuraufgaben oder die beispielhaften mündlichen Abiturprüfungen.

CHECKLISTE

☐	Transformationen von beliebigen Funktionen im Funktionsterm und im Graph erkennen und angeben
☐	Ableitungsregeln kennen und anwenden
☐	Funktionen bezüglich Grenzverhalten, Stetigkeit, Monotonie und Krümmung untersuchen
☐	Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte berechnen und mit dem Hilfsmittel grafisch bestimmen
☐	grafisches Bestimmen und Berechnen von Schnittpunkten zweier Funktionen
☐	Untersuchung auf Berührpunkte bei zwei Funktionen
☐	Bestimmung von Steigungswinkeln bei Funktionen
☐	Bestimmung von Tangenten- und Normalengleichungen
☐	Bestimmung von Umkehrfunktionen
☐	Stammfunktion und unbestimmtes Integral bestimmen
☐	bestimmtes Integral berechnen
☐	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen und anwenden
☐	Fläche zwischen zwei Graphen berechnen
☐	unendliche Flächen auf Existenz überprüfen
☐	Rotationskörper berechnen
☐	unterschiedliche Wachstumsprozesse erkennen
☐	Kurvenscharen hinsichtlich charakteristischer Punkte untersuchen und Ortskurven bestimmen
☐	Bestimmung von Funktionsgleichungen
☐	Extremwertaufgaben lösen

1.1 Übungsaufgaben

Grundlagen

Grundlagen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Geben Sie an, durch welche **Transformation** der Graph der Funktion f in den Graphen der angegebenen Funktion übergeht.

a) $g(x) = x^2 - 3$ b) $h(x) = 2 \cdot x^2$

c) $i(x) = (x - 3)^2 + 4$ d) $j(x) = -(x + 4)^2$

1.3 Klausuraufgaben

Klausur 1: Testfahrt eines Autos

CAS/MMS

Eine Testfahrt eines neuen Autos auf einem stillgelegten Flughafen ist bezüglich ihrer Geschwindigkeit untersucht worden.
Die Funktion
$f(x) = -\frac{1}{105\,000} \cdot x^4 + \frac{1}{350}x^3 - \frac{148}{525} \cdot x^2 + \frac{71}{7} \cdot x$
gibt die Geschwindigkeit in km/h an.
Die x-Achse entspricht der Zeit in Sekunden.
Betrachtet wird ein Intervall von 150 Sekunden.

1.1 Ermitteln Sie die Geschwindigkeit zu Beginn und nach 20 Sekunden der Testfahrt.

1.2 Bestimmen Sie die Zeitpunkte, an denen das Auto eine Geschwindigkeit von 100 km/h hatte.

1.3 Berechnen Sie die größte Geschwindigkeit, die das Auto während der Testfahrt hatte.

1.4 Ermitteln Sie den Zeitpunkt in dem das Auto maximal beschleunigte.

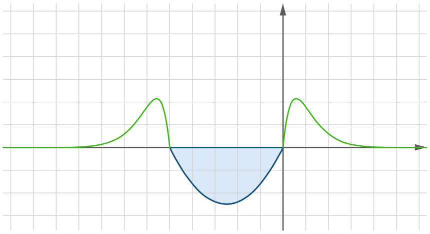
1.5 Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos.

Ein Mitarbeiter führte die folgende Berechnung durch: $\frac{1}{3600} \cdot \int_0^{150} f(x)\,dx = \frac{325}{84} \approx 3{,}869$

1.6 Geben Sie an, was hier berechnet wird und bestätigen Sie das Ergebnis durch eine andere Rechnung.

1.7 Bestimmen Sie das Intervall, welches symmetrisch zum lokalen Tiefpunkt der Geschwindigkeitskurve von f ist und in dem die anfängliche Geschwindigkeit der durchschnittlichen Geschwindigkeit entspricht. meist nur LK
Geben Sie die Zeitpunkte dieses Intervalls auf Hunderstelsekunden und die zugehörige Geschwindigkeit auf eine Nachkommastelle an.

Klausur 2: Deich am Kanal



An einem 10 Kilometer langen Kanal wird auf beiden Seiten ein Deich gebaut. Der Querschnitt des Deiches entspricht dem Graphen der Funktion $f(x) = (10 \cdot x - x^2) \cdot e^{-0.75 \cdot x}$. Die x-Achse repräsentiert dabei die Erdoberfläche und die y-Achse die Höhe über dem Erdboden. Links vom Ursprung befindet sich der Kanal und der Deich auf der anderen Seite entspricht der Achsenspiegelung der Funktion f an der Parallelen zur y-Achse an der Geraden $x = -5$. Die Einheiten sind Meter.

2.1 Geben Sie die Höhe des Deiches 2 m vom rechten Rand des Kanals entfernt in Meter mit zwei Nachkommastellen an. Bestimmen Sie ebenfalls die Breite des Kanals.

2.2 Berechnen Sie die Breite und die maximale Höhe des rechten Deiches.

2.3 Um die Fläche rechts vom höchsten Punkt zu pflegen, soll ein Rasenmäher eingesetzt werden. Ermitteln Sie, welchen Steigungswinkel der Rasenmäher dafür schaffen müsste.

2.4 Berechnen Sie das Volumen der für diesen Deichbau benötigten Erde.

2.5 Bestimmen Sie mithilfe des Funktionsterms von f den Funktionsterm g für den linken Deich.

In der Planungsphase hat ein anderer Entwickler eine andere Querschnittsfläche bevorzugt. Er plante mit einer nach unten geöffneten Parabel, die 4 m hoch und auf Erdbodenniveau ebenfalls 4 m breit wäre.

2.6 Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm h und ermitteln Sie den Materialbedarf für diese Planung.

Gegeben ist weiterhin der Funktionsterm des Flussbettes mit $b(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 5)^2 - 5$.

2.7 Zeigen Sie, dass die Graphen von f und b beim Ursprung ineinander übergehen, dabei aber ein Knick entsteht.

1.4 *Aufgaben zum mündlichen Abitur*

Prüfungsteil 1: Vortrag

Aufgabe 6: Wirksamkeit eines Medikaments

Ein Patient leidet unter starken Schmerzen. Er erhält ein Schmerzmittel über eine Infusion. Die Funktion $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-0{,}2x}$ ordnet der Zeit in Stunden nach Beginn der Einnahme die Konzentration des Schmerzmittels im Blut in mg/Liter zu.

6.1 Bestimmen Sie die Konzentration des Medikaments nach 2 Stunden.

6.2 Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments.

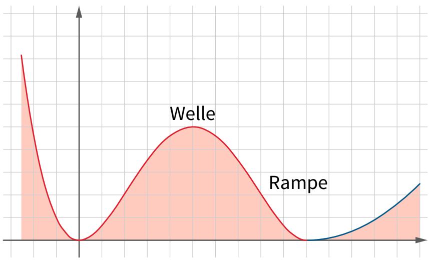
6.3 Das Medikament wirkt ab einer Konzentration von 4 mg/Liter.
Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.

CAS/MMS **6.4** Nach der maximalen Konzentration des Medikaments sinkt die Konzentration zunächst immer stärker. Ab welchem Zeitpunkt sinkt die Abnahme wieder?

6.5 Die Fläche unter dem Graphen von f entspricht der Menge Schmerzmittel, die über die Infusion verabreicht wird.
Ermitteln Sie die Menge an Schmerzmittel, die in den ersten 20 Stunden über die Infusion verabreicht wird.
Die Krankenschwester wählt ein höher dosiertes Medikament. Die Funktion $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-0{,}2x}$ entspricht dem Verlauf dieser Infusion. Das Medikament wirkt ab einer Konzentration von 30 mg/Liter toxisch.

meist nur LK **6.6** Bestimmen Sie den maximalen Wert von a, für den das Medikament nicht toxisch wirkt.
Ohne Nachweis darf verwendet werden: $f_a''(x) = (0{,}04 \cdot a \cdot x - 0{,}4 \cdot a) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x}$

Aufgabe 7: Skaterpark



In einem Skaterpark ist eine Welle mit anschließender Rampe verbunden. In der Abbildung erkennt man das Profil. Der Teil vom Start $(x = -0{,}5)$ bis zum Beginn der Rampe $(x = 2)$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ modelliert, die Rampe ist im Bereich für $2 < x < 3$ durch die Funktion $g(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ gegeben.

7.1 Geben Sie die Höhe des Startpunktes an.

7.2 Berechnen Sie den höchsten Punkt der Welle.

7.3 Ermitteln Sie den Punkt mit dem stärksten Gefälle und geben Sie das Gefälle an.

7.4 Damit man die Welle und die Rampe gut hintereinander fahren kann, ist ein knickfreier Übergang notwendig.
Für einen knickfreien Übergang muss Folgendes gelten: I. $f(x) = g(x)$ II. $f'(x) = g'(x)$
Begründen Sie die Notwendigkeit der beiden Gleichungen für einen knickfreien Übergang an einem Punkt x_0 und überprüfen Sie, ob der Übergang für $x_0 = 2$ knickfrei ist.

Lösungen zu den Klausuraufgaben

TIPP

Tipps zum allgemeinen Vorgehen mit Aufgaben in der Analysis

- Lass dir den Funktionsgraphen und die Ableitungsgraphen mithilfe des MMS oder CAS anzeigen.
- Kontrolliere deine Eingabe noch einmal auf Richtigkeit. Wenn man hier einen Zahlendreher oder einen anderen Fehler bei der Eingabe macht, sind die Ergebnisse verfälscht oder sogar ganze Aufgabenteile werden unlösbar.
- Passe das Betrachtungsfenster des Hilfsmittels an und blende nicht benötigte Graphen (Funktionsgraphen und Ableitungsgraphen) nach Bedarf aus.

Klausur 1: Testfahrt eines Autos

1.1 TIPP

Da hier Funktionswerte gesucht werden, musst du die x-Werte in den Funktionsterm einsetzen und ausrechnen.

CAS oder MMS liefert: $f(0) = 0$; $f(20) \approx 111{,}4$

Zu Beginn fährt das Auto nicht. Der Beobachtungszeitraum startet bei 0 km/h.

Nach 20 Sekunden fährt das Auto ungefähr 111 km/h.

1.2 TIPP

Hier ist ein y-Wert gegeben. Um den zugehörigen x-Wert zu bestimmen kannst du entweder eine Gleichung lösen oder auch einen Schnittpunkt zwischen dem Funktionsgraphen und der Parallelen zur x-Achse durch den gesuchten y-Wert bestimmen.

Die Gleichung $f(x) = 100$ wird mithilfe von MMS/CAS gelöst.

Das Auto fährt auf der Testfahrt nach 15,6; 50; 100 und 134,4 Sekunden 100 km/h.

$$f(x) = \frac{-1}{105\,000}x^4 + \frac{1}{350}x^3 - \frac{148}{525}x^2 + \frac{71}{7}x$$

$f(20)$

≈ 111.4285714286

$\text{Löse}\ (f(x) = 100)$

$= \{x = -5\sqrt{141} + 75,\ \ x = 50,\ \ x = 100,\ \ x = 5\sqrt{141} + 75\}$

$\text{NLöse}\ (f(x) = 100)$

$\approx \{x = 15.62828956481,\ \ x = 50,\ \ x = 100,\ \ x = 134.3717104352\}$

Lösungen zu den Aufgaben zum mündlichen Abitur

Aufgabe 6: Wirksamkeit eines Medikaments

TIPP

Beginne auch in der Vorbereitungszeit des mündlichen Abiturs in der Analysis mit der Eingabe des angegebenen Funktionsterms in Dein technisches Hilfsmittel (CAS oder MMS). Stelle das Betrachtungsfenster ein und beginne dann mit den Überlegungen und Berechnungen.
Die Visualisierung der Funktion kann dir dabei bereits helfen.

6.1 **TIPP**

Hier ist ein Funktionswert gesucht.

Gesucht ist der Wert der Funktion $f(2) \approx 13{,}4$.
Nach 2 Stunden ist die Konzentration 13,4 mg/Liter.

6.2 **TIPP**

Bestimme hier Extrempunkte. Die Randwerte sollte man nicht vergessen.
Insbesondere in der mündlichen Prüfung macht es Eindruck, wenn man hier mathematisch sinnvoll begründet. Das spart eventuell zusätzlich Zeit.

$f'(x) = 10 \cdot e^{-0{,}2 \cdot x} + 10 \cdot x \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x} = (-2 \cdot x + 10) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x}$

notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x) = 0$

$(-2 \cdot x + 10) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x} = 0 \;\Leftrightarrow\; -2 \cdot x + 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot x = 10 \;\Leftrightarrow\; x = 5$

hinreichende Bedingung für Extrema: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(x) = (0{,}4 \cdot x - 4) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x}$ $f''(5) = (0{,}4 \cdot 5 - 4) \cdot e^{-0{,}2 \cdot 5} = -2 \cdot e^{-1} = -\frac{2}{e}$

y-Wert: $f(5) \approx 18{,}39$ Da dieses Maximum das einzige Extremum ist, ist es auch das globale Maximum. Nach 5 Stunden ist die Konzentration mit 18,39 mg/l maximal.

6.3 **TIPP**

Hier ist ein Intervall auf der x-Achse gesucht.
Bestimme zunächst die Punkte, in denen die Konzentration 4 mg/l ist.

Gesucht: Schnittpunkt von $f(x)$ und $g(x) = 4$
Schnittpunkte von f und g sind: $S_1\,(0{,}4365\,|\,4)$ $S_2\,(19{,}41\,|\,4)$
Umwandlung der Nachkommastellen in Minuten: $0{,}4365 \cdot 60 = 26{,}19$; $0{,}41 \cdot 60 = 24{,}6$
Das Medikament wirkt von der 26. Minute nach dem Beginn der Infusion bis 19 Stunden und 24 Minuten nach diesem Beginn.

2 Analytische Geometrie

Dieses Kapitel enthält für dich Übungsaufgaben zu den wichtigsten Aspekten der analytischen Geometrie: der Darstellung von Objekten im dreidimensionalen Raum, dem Rechnen mit Vektoren, der Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, sowie den Berechnungen von Abständen und Winkeln zwischen unterschiedlichen Objekten.

CHECKLISTE

☐	lineare Gleichungssysteme mithilfe eines geeigneten Verfahrens lösen (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, GAUSS-Algorithmus, unter Nutzung eines MMS)
☐	Punkte im dreidimensionalen Raum mit Koordinaten beschreiben, die Länge und den Mittelpunkt einer Strecke berechnen
☐	den Begriff Vektor erklären
☐	mit Vektoren rechnen (Addition, Subtraktion, Linearkombination, S-Multiplikation, Kollinearität, Betrag)
☐	das Skalarprodukt erläutern und berechnen, Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen, das Vektorprodukt erläutern und berechnen
☐	Geraden und Strecken im Raum mithilfe der Parameterdarstellung beschreiben
☐	Ebenen im Raum in unterschiedlichen Darstellungsformen beschreiben (Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor, Normalenform, HESSE-Normalenform)
☐	unterschiedliche Inzidenzen und Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten (Geraden/ Ebenen) benennen, geometrische Objekte auf ihre Lagebeziehung hin untersuchen
☐	Abstände zwischen geometrischen Objekten berechnen
☐	Spiegelungen von geometrischen Objekten durchführen
☐	Flächenberechnungen durchführen

2.1 Übungsaufgaben

Lineare Gleichungssysteme

BEACHTE

- Lineare Gleichungssysteme (LGS) können auf unterschiedliche Arten gelöst werden: Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, GAUSS-Algorithmus
- Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren bieten sich an, wenn das lineare Gleichungssystem nur zwei Gleichungen besitzt. Ansonsten solltest du den GAUSS-Algorithmus nutzen oder die Lösung – wenn die Aufgabenstellung es erlaubt – mit dem Rechner/MMS bestimmen.

Vektorrechnung
& Skalarprodukt

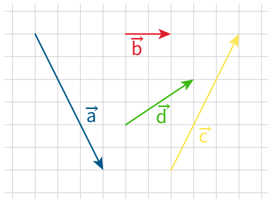
Vektorrechnung

10. Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ an. $A(-2|3|5)$, $B(0|-1|2)$

11. Berechnen Sie jeweils für den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. a) $3 \cdot \vec{p}$ b) $-2 \cdot \vec{p}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \vec{p}$

12. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ aus der nebenstehenden Abbildung und bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die folgenden Linearkombinationen.

a) $\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ b) $\vec{b} - 2\vec{d}$ c) $\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d} + \frac{2}{3}\vec{a}$



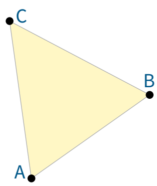
13. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Kollinearität.

b) Berechnen Sie die Linearkombination $\vec{c} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$

c) Begründen Sie, warum der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

14. Gegeben sind die Punkte $A(0|1|1)$, $B(4|1|1)$ und $C(2|3|2)$. Überprüfen Sie, ob es sich beim Dreieck ABC um ein gleichseitiges Dreieck handelt.



Skalarprodukt

15. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zueinander orthogonal sind.

b) Geben Sie Werte für x und y an, sodass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zueinander orthogonal sind.

16. Gegeben sind die Punkte $A(4|6|2)$, $B(-2|3|3)$ und $C(1|2|4)$. Berechnen Sie alle Innenwinkel des Dreiecks ABC.

17. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

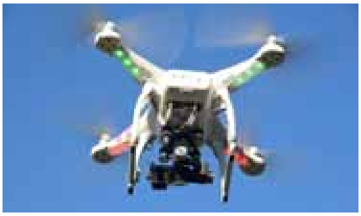
a) Berechnen Sie mithilfe des Vektorproduktes einen Vektor, der orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

2.3 *Klausuraufgaben*

Klausur 1: Drohnenkameras im Leichtathletikstadion

Bei Fernsehübertragungen von Sportereignissen werden mittlerweile auch im Sport Drohnen mit Kameras eingesetzt. Sie ermöglichen neue und ungewohnte Perspektiven und erhöhen damit die Attraktivität der Sportberichterstattung für die Zuschauer.



Bei einem Lauf im Leichtathletikstadion befindet sich die Drohne zu Beginn an der Position $A(5|5|10)$ direkt über der Startlinie und am Ende an der Position $B(85|65|10)$ direkt über der Ziellinie. Danach fliegt die Drohne weiter zur Position $C(50|30|30)$.
(1 LE = 1 Meter)

1.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich beim Lauf von A nach B um ein 100-m-Rennen handelt.

1.2 Für die Strecke von 100 m benötigte Usain Bolt bei seinem Weltrekord 9,58 Sekunden. Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h, die die Drohne bei diesem Rennen hätte fliegen müssen, um mit Usain Bolt mitzuhalten.

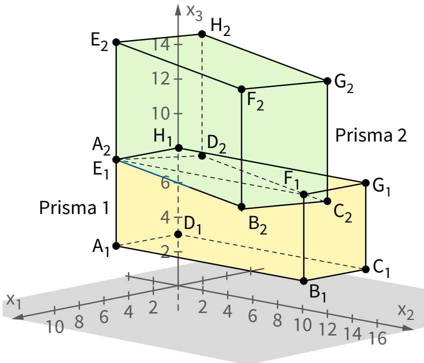
1.3 Ermitteln Sie den Winkel der Richtungsänderung im Punkt B.

1.4 Dort, wo Nord- und der Osttribüne zusammentreffen, befindet sich eine Treppe.
Die Nordtribüne ist Teil der Ebene $E_N\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$,
und die Osttribüne liegt in der Ebene $E_O\colon -8x_1 - 10x_2 + 25x_3 = 40$.
Für die Planung der Treppe ermittelte das Architekturbüro, nach dessen Plänen das Stadion gebaut wurde, $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 245 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -190 \\ -3 \\ -62 \end{pmatrix}$ als Schnittgerade der beiden Ebenen E_N und E_O. Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Architekturbüro die richtige Geradengleichung bestimmt hatte.

1.5 Untersuchen Sie, ob die beiden Tribünen im gleichen Winkel ansteigen.

CAS/MMS **1.6** Vom Punkt C fliegt die Drohne direkt zur Weitsprunggrube im Punkt $D(30|50|20)$.
In der Zeit wirft ein Hammerwerfer sein Sportgerät.
Der Hammer fliegt in der Ebene $H\colon\ x_2 = 40$ mit einer Flugbahn, die sich mit der Gleichung $x_3 = -\frac{1}{32}x_1^2 + \frac{15}{8}x_1$ beschreiben lässt.
Bestimmen Sie die Flugweite des Hammers und untersuchen Sie, ob Kollisionsgefahr zwischen Drohne und Hammer bestand.

Klausur 3: Schule für Kunst und Design in Barcelona



Die *Escola Massana* in Barcelona ist eine Schule für Kunst und Design. Das Schulgebäude besitzt eine außergewöhnliche Architektur, bei der besonders zwei sich schneidende gerade Prismen ins Auge fallen. Das Prisma 1 hat eine Höhe von 5 Metern. Die Koordinaten der Eckpunkte seiner Grundfläche lauten: $A_1(5|0|3)$, $B_1(5|15|3)$, $C_1(0|15|3)$, $D_1(0|0|3)$
Das Prisma 2 hat eine Höhe von 7 Metern. Die Koordinaten der sichtbaren Eckpunkte seiner Grundfläche lauten: $A_2(2|-3|7)$, $B_2(7|12|7)$, $D_2(-3|-1|7)$. [Alle Angaben in m]

3.1 Die folgende Rechnung zeigt ein mögliches Vorgehen zur Bestimmung des nicht sichtbaren Eckpunktes C_2 der Grundfläche von Prisma 2.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = s = 1, \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2(2|14|7)$$

Erläutern Sie diese Rechnung.

3.2 Überprüfen Sie, ob es sich bei Prisma 2 um einen Quader handelt.

3.3 Stellen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform der Ebene E auf, die die Punkte A_1, B_1 und F_1 enthält.

$$\left[\text{mögliche Lösung: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right]$$

CAS/MMS

3.4 Das Prisma 2 ist in Bezug auf das Prisma 1 um einen bestimmten Winkel gedreht. Sein Eckpunkt B_2 ragt dabei aus dem Prisma 1 heraus (s. Abbildung).

(1) Bestimmen Sie den Winkel, um den das Prisma 1 in Bezug auf das Prisma 2 gedreht worden ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Kanten $\overline{A_2B_2}$ und $\overline{B_2C_2}$ die Ebene E in den Punkten $S_1(5|6|7)$ und $S_2(5|12{,}8|7)$ schneiden.

(3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $S_1S_2B_2$.

3.5 Geben Sie begründet an, welche Punkte von Prisma 1 in der Ebene $F: x_3 = 8$ liegen.

3.6 Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen E und F und beschreiben Sie ihre besondere Lage.

3.7 Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Abstand des Punktes G_1 von der Kante $\overline{A_2B_2}$ zu bestimmen.

Lösungen zu den Klausuraufgaben

Klausur 1: Drohnenkameras im Leichtathletikstadion

1.1 **TIPP**

- Die Länge der Laufstrecke zwischen den Punkten A und B entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$.
- Achte auf die Ergänzung zum Operator „Weisen Sie nach“. Hier wird der Nachweis rechnerisch verlangt, das bedeutet, dass du den Rechenweg ausführlich darstellen musst.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{80^2 + 60^2 + 0^2} = \sqrt{10\,000} = 100$$

Damit hat man nachgewiesen, dass es sich um ein 100-m-Rennen handelt.

1.2 **TIPP**

- Durchschnittsgeschwindigkeiten kannst du berechnen, indem du die zurückgelegte Stecke durch die dafür benötigte Zeit teilst.
- Achte bei solchen Aufgaben genau auf die angegebenen Einheiten für Strecke und Zeit.
- Häufig muss eine Geschwindigkeit, von der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ umgerechnet werden. Da 1 Kilometer 1000 Meter und 1 Stunde 3600 Sekunden hat, ergibt sich der Umrechnungsfaktor durch $\frac{3600}{1000} = 3{,}6$.

Es müssen die 100 Meter durch die 9,58 Sekunden geteilt werden: $\frac{100\,\text{m}}{9{,}58\,\text{s}} \approx 10{,}44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Da man die Angabe in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ angeben soll, muss man diesen Wert noch mit dem Umrechnungsfaktor 3,6 multiplizieren:

$10{,}44 \cdot 3{,}6 \approx 37{,}58 \Rightarrow$ Die Drohne hätte mit einer Geschwindigkeit von $37{,}58\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegen müssen, um mit Usain Bolt mitzuhalten.

1.3 **TIPP**

Überlege dir, welche Vektoren den Flug der Drohne beschreiben und bestimme den Winkel zwischen diesen Vektoren.

Gesucht ist hier der Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ -35 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Für den Winkel α gilt:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -35 \\ -35 \\ 20 \end{pmatrix}}{\sqrt{80^2 + 60^2} \cdot \sqrt{(-35)^2 + (-35)^2 + 20^2}}\right) \approx 156{,}6°$$

Die Richtungsänderung beträgt 156,6°.

3.4 Aufgaben zum mündlichen Abitur

Aufgabe 7

7.1 Nennen Sie die Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für binomialverteilte Zufallsvariablen X und erläutern Sie, inwiefern diese Formel eine Vereinfachung großer Baumdiagramme darstellt.

7.2 Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen unregelmäßigen Würfel und X die Zufallsvariable, die die Augenzahl angibt.

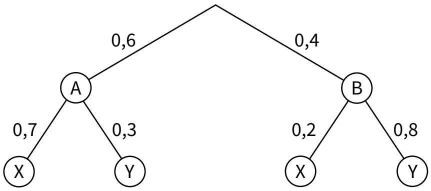
X	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,25	0,05	0,3	0,1	

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten a) $P(X = 6)$ b) $P(X < 4)$.

7.3 Berechnen Sie zu dem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(A \cap X)$ b) $P(X)$

c) $P_A(X) = P(X \mid A)$ d) $P_X(A) = P(A \mid X)$



7.4 Eine binomialverteilte Zufallsvariable X hat die Parameter $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) Stellen Sie eine Formel für die Berechnung von $P(X \leq 1)$ auf.

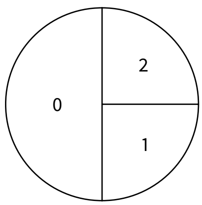
b) Erläutern Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: $\sum_{i=2}^{4} \binom{10}{i} \cdot 0{,}6^i \cdot 0{,}4^{10-i}$

7.5 Erläutern Sie allgemein das Vorgehen bei einem Hypothesentest.
Bestimmen Sie anschließend den Annahme- und Ablehnungsbereich eines linksseitigen Test mit $n = 100$ und H_0: $p = 0{,}8$ zum Signifikanzniveau von 10 %.

Aufgabe 8

8.1 Nennen Sie die Eigenschaften und Bedingungen der Gleichverteilung und Binomialverteilung und geben Sie jeweils ein Beispiel für eine entsprechend verteilte Zufallsvariable an.

8.2 Für einen Euro Einsatz darf man das abgebildete Glücksrad drehen und bekommt so viel Euro ausbezahlt, wie die Zahl in dem erdrehten Feld angibt.



a) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.

b) Der Betrag b, den man für einen Durchgang bezahlen müsste, damit das Spiel fair ist, wird durch folgende Gleichung berechnet:
$(0 - b) \cdot 0{,}5 + (1 - b) \cdot 0{,}25 + (2 - b) \cdot 0{,}25 = 0$
Erläutern Sie die einzelnen Komponenten und das Zustandekommen dieses Terms.