MATHEMATIK NEUE WEGE gA

ARBEITSBUCH FÜR GYMNASIEN

LÖSUNGEN NIEDERSACHSEN

grundlegendes Anforderungsniveau

Herausgegeben von

Henning Körner

Arno Lergenmüller

Günter Schmidt

Martin Zacharias

Schroedel
westermann

MATHEMATIK NEUE WEGE gA
Arbeitsbuch für Gymnasien
Niedersachsen
grundlegendes Anforderungsniveau

Lösungen

Bearbeitet von

Miriam Dolic, Manuela Hillje, Henning Körner, Arno Lergenmüller, Martin Zacharias

westermann GRUPPE

Druck A[1] / Jahr 2019
Alle Drucke der Serie A sind im Unterricht parallel verwendbar.

Redaktion: Marcel Orban
Grafiken: imprint, Ilona Külen, Zusmarshausen; Mario Valentinelli, Rostock; Michael Wojczak, Braunschweig;
Taschenrechner-Screenshots: Texas Instruments Education Technology GmbH, Freising
Umschlaggestaltung: Janssen Kahlert Design & Kommunikation GmbH, Hannover
Bildquellen: alamy images, Abingdon/Oxfordshire: VIEW Pictures Ltd 43. |Picture-Alliance GmbH, Frankfurt/M.: dpa 43, 44, 46. |Shutterstock.com, New York: JaysonPhotography 42; Mohd Nasirruddin Yazid Titel; Ronaldo Almeida 42.
Wir arbeiten sehr sorgfältig daran, für alle verwendeten Abbildungen die Rechteinhaberinnen und Rechteinhaber zu ermitteln. Sollte uns dies im Einzelfall nicht vollständig gelungen sein, werden berechtigte Ansprüche selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.

Druck und Bindung: Westermann Druck GmbH, Braunschweig

ISBN 978-3-507-**88738**-1

Inhalt

Vorbemerkungen

Dieses Lösungsheft richtet sich in erster Linie an die Lehrenden.

Die Lösungsskizzen gestatten einmal einen schnellen Überblick über Anspruch und Intention der vielfältigen Aufgaben, zum anderen weisen sie vor allem bei den komplexeren und offenen Aufgaben auf verschiedene Lösungswege hin, wie sie von den Lernenden individuell beschritten werden können. Zusätzlich erläutern die kurzen didaktischen Hinweise vor den Lösungen zu jedem Kapitel noch einmal die konzeptionellen Anliegen der einzelnen Kapitel.

Die Lösungen und Lösungshinweise sind von der Sprache und dem Umfang so gehalten, dass sie je nach der gewählten Unterrichtsform und Entscheidung der Unterrichtenden meist auch den Lernenden zur Verfügung gestellt werden können. Dies entspricht der Auffassung von eigentätigem und selbstständigem Lernen und dem Erwerb von Lernstrategien, die diesem Buch zugrunde liegt. Häufig werden verschiedene Lösungswege explizit herausgefordert. In diesen Fällen stellen die dargestellten Lösungen nur eine von vielen Möglichkeiten dar.

Zu diesem Buch

Dieses Buch verfolgt hinsichtlich Konzeption und Gestaltung den für Mathematik NEUE WEGE typischen Ansatz eines Schulbuchs, indem es schüleraktiven, problemorientierten Unterricht als Alternative zu einem traditionellen Unterrichtsgang zur konzeptionellen Grundlage macht. Es berücksichtigt in mehrfacher Hinsicht die konstruktiven Ansätze, die im Zusammenhang mit der Diskussion um die Allgemeinbildung im Mathematikunterricht in den letzten Jahren entwickelt wurden.

Anmerkung zu gA und eA:
Wo immer möglich sind die Lernabschnitte und Aufgaben in gA und eA identisch, so dass eA ein gA+ ist wie es die Bildungsstandards und das KC vorsehen. So wird Lehrkräften eine größtmögliche Überschneidungsmenge an Aufgaben und verlässliche Transparenz mit einhergehender Arbeitseffizienz für die Unterrichtsgestaltung geboten.

1. Das Buch unterstützt eine Unterrichtskultur, in der die absolute Dominanz des Grundschemas:
   kurze Einführung → algorithmischer Kern (Kasten) → Üben
   überwunden wird zugunsten einer **Methodenvielfalt mit offenen und schüleraktiven Lernformen.**

Dies zeigt sich zunächst in der Gliederung jedes Lernabschnittes in drei Ebenen **„grün 1 – weiß – grün 2“**.
- **1. grüne Ebene:** In der 1. grünen Ebene werden verschiedene Zugänge zum Thema des Lernabschnitts angeboten. Dies geschieht in Form von interessanten, aktivitäts- und denkanregenden Aufgaben, die einerseits die unterschiedlichen Interessen und Lerntypen ansprechen und anderseits außer- und innermathematische Hinführungen zum Kerninhalt des Lernabschnitts anbieten. Sie knüpfen an Vorerfahrungen der Lernenden an und regen zu unterschiedlichen Lösungsansätzen an. Häufig sind Wiederholungsaufgaben in die Neuerwerbsaufgaben eingebettet, so dass Vernetzungen mit vorher behandelten Inhalten aktiv ermöglicht werden.
- **Weiße Ebene:** Die weiße Ebene beginnt mit dem zentralen Basiswissen, das im hervorgehobenen Kasten festgehalten wird. Ergänzt wird das Basiswissen durch Beispiele, die die Inhalte in Aufgaben konkretisieren und als Vorlage („Musterlösung“) für die Schülerinnen und Schüler dienen. In der anschließenden Übungsphase werden zunächst Aufgaben zum Thema angeboten, die in ihrer Grundstruktur ganz nahe an den Beispielen sind, so dass hier verlässlich die grundle-

genden Kompetenzen erworben werden können und eine notwendige Ausformung von Routinen erfolgt. Wo notwendig und sinnvoll, werden grundsätzlich zunächst gekennzeichnete Aufgaben für eine hilfsmittelfreie Behandlung angeboten . Im weiteren Verlauf der Übungsphase werden die Inhalte auf vielfältige Weise durchgearbeitet und gefestigt. Hier treten dann auch Anwendungen und Vernetzungen auf um insgesamt ein „intelligentes Üben“ zu ermöglichen. Um die Möglichkeiten von Selbsttätigkeit zu erhöhen werden Möglichkeiten zur Selbstkonrolle und Tipps angeboten.
In den **Basiswissen** sind alle Pflichtinhalte des Kerncurriculums abgebildet, in den **gelben Merkkarten** werden ergänzende Sachverhalte angeboten, die im engeren Sinne aber nicht Pflichtstoff sind.
- **2. grüne Ebene:** Die 2. grüne Ebene ist der Erweiterung und Vertiefung gewidmet. In dieser Ebene befinden sich die fakultativen Inhalte eines Lernabschnitts. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist dabei die Einbindung der Aufgaben in Kontexte und Anwendungen. Ein zweiter Aspekt zielt auf offenere Unterrichtsformen (Experimente, Gruppenarbeit, Projekte), ein dritter auf passende Anregungen zum Problemlösen. Zusätzlich finden sich hier auch anschaulich gestaltete Lesetexte und Informationen.

Das Buch unterstützt vom Kontext der Aufgaben und von der Sprache her die Entwicklung und den Ausbau von Begriffen als Prozess. Dazu dient auch die konsequente Visualisierung mit Fotos, Skizzen und Diagrammen, sowohl zur Motivation, zum Strukturieren, zum Darstellen eines Sachverhaltes als auch zum leichteren Merken von Zusammenhängen.

2. Den Aufgaben liegt in allen Ebenen eine Auffassung des **„intelligenten Übens“** zugrunde.

Dies richtet sich in erster Linie wider einer einseitigen Ausrichtung an schematischem, schablonenhaftem Einüben von Kalkülen und nacktem Begriffswissen zugunsten eines vielfältigen Übens des Verstehens, des Könnens und des Anwendens. Zunächst werden in einem ersten Übungsteil im Anschluss an die Beispiele durchweg hinreichend viele Aufgaben angeboten, die einfaches Können stützen und dies auch für den Lernenden erfahrbar machen. Diese Aufgaben sind dann ebenso Bestandteil eines verstehensorientierten Lenprozesses, wie die weiterführenden Übungen, die folgenden Konstruktionsprinzipien zur Ermöglichung intelligenten Übens unterliegen:

Die Übungen
- sind im Umkreis von einfachen Problemen angesiedelt und häufig durch übergeordnete Aspekte zusammengehalten. Die Probleme erwachsen soweit möglich aus der Interessen- und Erfahrungswelt der Schüler.
- ermöglichen häufig kleine Entdeckungen oder vergrößern das über die Mathematik hinausweisende Sachwissen.
- fördern den konstruktiven Umgang mit Fehlern.
- fördern offene und kooperative Unterrichtsformen.
- bieten fächerverbindende und fächerübergreifende Aspekte.
- bieten die Möglichkeit zum Vergleich unterschiedlicher Lösungswege.
- machen den Erwerb von Strategien für das eigene Lernen bewusst.

3. Das Buch unterstützt **kumulatives und nachhaltiges Lernen**, d. h. die Lernenden erfahren deutlich Zuwachs an Kompetenz.

Dies wird durch verschiedene Gestaltungselemente erreicht:
- **Check-up:** Am Ende von jedem Kapitel gibt es übersichtliche Zusammenfassungen der Inhalte und zusätzliche Trainingsaufgaben zu den Basiskompetenzen. Die Lösungen sind am Ende des Buches.

- **Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben:** Am Ende eines Kapitels befinden sich übergreifende Übungen, deren Lösungen im Internet zu finden sind. Hier werden gezielt Übungen den Aufgabenbereichen *Trainieren, Verstehen und Anwenden* zugeordnet. Während die Lernabschnitte inhaltlich strukturiert sind, sind diese Aufgaben mehr nach Prozessen „quer dazu“ organisiert. Damit können die Fachinhalte eines Kapitels binnendifferenzierend je nach Bedarf vertiefend behandelt werden.
- **Grundwissen:** Dem Aufgreifen und Sichern von früherem Wissen und Fähigkeiten dienen kleine Aufgaben zum Basiswissen und den Basisfertigkeiten am Ende jeder weißen Ebene.
- **Zum Erinnern und Wiederholen:** Am Ende des Buches sind wichtige Inhalte vergangener Schuljahre zusammengestellt. Damit diese aktiv gefestigt oder wieder angeeignet werden können, sind zusätzlich einige Aufgaben dazu gegeben.

4. Die prozessorientierten Kompetenzen **Modellieren** und **Begründen** werden durchgehend explizit thematisiert und gefördert.

Die prozessorientierten Kompetenzen *Modellieren* und *Begründen* sind konstitutiver und durchgehend thematisierter Bestandteil im Buch und keine Singularitäten mit fakultativem Anstrich. So werden ihnen teilweise eigene Lernabschnitte mit entsprechenden Basiswissen gewidmet, immer aber sind in den Übungsphasen Aufgaben mit deutlich erkennbaren Sachsituationen als Ausgang mathematischer Tätigkeiten integriert. Die Sachsituationen sind, wo möglich, an die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler angelehnt, immer wieder werden auch Experimente zur eigenen Datenerzeugung angeboten. Die Kontexte sind so gewählt, dass sie als sinnvolle und nicht künstlich erzeugte erscheinen und erfassbar sind. Damit Schülerinnen und Schüler hier in gleicher Weise wie bei den Inhalten Kompetenzzuwächse erfahren können, sind Modellierungs- und Begründungsaufgaben kumulativ curricular eingebaut.

5. Die Benutzung **digitaler Werkzeuge** ist in Anlehnung an die curricularen Vorgaben integraler Bestandteil der inhaltlichen Gestaltung der Lernabschnitte.

Sowohl die Arbeit mit GTR und CAS als auch anderer Software ist so im Buch verankert, dass alle grundlegenden Verfahren (Befehle etc.) explizit an geeigneter Stelle in einem **Werkzeug** dargestellt werden, so dass auch hier ein kumulativer Lernzuwachs erfahrbar wird und ein entsprechender roter Faden entsteht. Spezifische Möglichkeiten eines CAS sind gekennzeichnet. Digitale Werkzeuge sind in dem Sinne konstitutiv eingewoben als es durchweg Aufgaben zur Exploration, Überprüfung und Rechenentlastung sowie zum vielfältigen Darstellungswechsel (Term – Tabelle – Graph) gibt. Darüberhinaus werden an geeigneten Stellen Applets mit GeoGebra-ähnlicher Bedienung angeboten, um vielfältige Visualisierungen zu ermöglichen, ohne dass Lehrkräfte diese selber „bauen“ müssen.

6. Das Buch wird eingebettet in eine integrierte Lernumgebung.

- **Übungsmaterialien** in Kopiervorlagen.
- **Arbeitshefte**. Diese unterstützen und erweitern insbesondere die im Lehrwerk bereits konsequent berücksichtigten Anliegen des Aufbaus grundlegender mathematischer Basisfähigkeiten und des kontinuierlichen Sicherns des dazu gehörigen Basiswissens.
- digitale Unterrichtsmaterialien (**BiBox**), mit denen
  - interaktive Zugänge zu Themenfeldern zum explorativen Lernen angeboten werden.
  - das Schulbuch digital zur Verfügung steht
  - Lehrkräfte eigene Arbeitsblätter etc. gestalten können
  - zusätzliche binnendifferenzierende Aufgaben zum Fördern und Fordern in Ergänzung zu vielen Aufgaben des Arbeitsbuches gegeben werden.

Kapitel 1
Von der Änderung zum Bestand

Didaktische Hinweise

Die Leitfrage innerhalb der Differentialrechnung ist in NEUE WEGE die Frage nach der Änderung bei gegebenem Bestand. Geometrisch bedeutet dies dann die Steigung von Funktionsgraphen. Konsequent und analog dazu nimmt die Integralrechnung ihren Ausgang von der Frage nach dem Bestand, wenn das Änderungsverhalten gegeben ist (Rekonstruktion aus Änderung, vgl. KC).
Zentral ist dann die Erkenntnis, dass dies geometrisch auf die Bestimmung von Flächeninhalten unter dem Änderungsgraphen führt, Bestände also als „Summation unendlich vieler momentaner Änderungen" aufgefasst werden können. Charakteristisch für dieses Konzept ist damit die fast parallele Einführung der beiden Grundkonzepte zur Integralrechnung, Flächenbestimmung (Gesamtbilanz) und Rekonstruktion. Dies erfolgt auch analog zur Einführung der Differentialrechnung in Klasse 11. Es steht zunächst der Aufbau adäquater Grundvorstellungen im Mittelpunkt, ehe Kalküle entwickelt werden. Der Verzicht auf die frühzeitige Einführung komplexerer Theorieelemente und Begriffsfestlegungen ermöglicht es, dass von Beginn an in qualitativer Weise substanzreiche Probleme behandelt werden können. Der Integralbegriff wird also nicht nach einer vorgängigen Durststrecke über Produktsummen und deren Grenzwerte eingeführt, ehe er in Anwendungen kalkülorientiert genutzt wird, sondern es wird ein qualitativer Weg zum Hauptsatz mit dessen frühzeitiger, auf Einsicht fußender Einführung aufgezeigt, der es ermöglicht, alle klassischen Anwendungen zu behandeln. Das Konzept „Rekonstruktion aus Änderung" begünstigt das frühe Erfassen der Kernaussage des Hauptsatzes.

In **1.1** geht es um qualitative Einsichten und Erfahrungen in vielfältigen Sachzusammenhängen analog zum einführenden Lernabschnitt in der Differentialrechnung in Klasse 11. In **1.2** wird mit den Stammfunktionen das entscheidende Werkzeug zum Lösen der Probleme aus Sachsituationen eingeführt und der Umgang damit geübt. Damit ist sehr früh der erste Teil des Hauptsatzes („Integrieren als ‚Umkehrung' des Differenzierens") erfasst, ehe in **1.3** der zweite Teil mit dem daraus abgeleiteten Kalkül entwickelt wird. In **1.4** und **1.5** werden die beiden Anwendungsbereiche, Rekonstruktionen aus Änderungen und Flächenbestimmungen in vielfältiger Weise thematisiert.

Zu 1.1: Der erste Lernabschnitt dient dem Aufbau und der Festigung adäquater Grundvorstellungen. In einer konkreten Anwendungssituation (Fallturm) und einer idealisierten Alltagssituation (Füllen einer Wanne) erfahren und erarbeiten Schülerinnen und Schüler die Entwicklung von Beständen (Höhe und Füllmenge) aus gegebenen Änderungensfunktionen (Geschwindigkeit und Zuflussrate) und den Zusammenhäng mit Flächenbestimmungen. Dieser Zusammenhang wird im Basiswissen qualitativ und an einem archetypischen Beispiel erläutert. Innerhalb der Übungsphase wird dieser Zusammenhang dann in vielfältigen Kontexten variierend durchgearbeitet. Dabei werden sowohl konkrete näherungsweise Berechnungen von Flächen als auch qualitative Rekonstruktionen von „Bestandsfunktionen" aus „Änderungsfunktionen" geübt.

Zu 1.2: Aufgrund des Ansatzes über „Rekonstruktion aus Änderung" gerät der Zusammenhang zum Ableiten früh in den Blick, Schülerinnen und Schüler erfassen intuitiv die Kernaussage des Hauptsatzes. Deswegen wird dieser Zusammenhang hier mit der Einführung von Stammfunktionen auch schon früh in einem ersten Basiswissen festgehalten und dann durch die Einführung von Stammfunktionen und Regeln des Umgangs damit ergänzt. Damit stehen alle wesentlichen Werkzeuge zum Berabeiten von Anwendungsproblemen bezüglich Rekonstruktion und Flächenbestimmung frühzeitig zur Verfügung.

Zu 1.3: Hier werden nun die notwendigen Begriffe eingeführt und der Hauptsatz explizit formuliert. Dieser Lernabschnitt ist damit im Wesentlichen innermathematisch motiviert und orientiert. Der Verzicht auf Integralfunktionen in gA-Kursen (vgl. KC) führt zu einer ‚schlanken' Formulierung des Hauptsatzes mit begrifflich stark reduzierter Formulierung. Viel Wert wird aber auf die parallele Formulierung der Zusammenhänge bezüglich „Rekonstruktion" und „Flächenbestimmung" gelegt. Dies schafft hinreichende Verständlichkeit für das Arbeiten in Kursen auf grundlegendem Niveau. Nach einem operativen Durcharbeiten mit Berechnungen von Integralen wird in einem Text die Begrenztheit des bisherigen Vorgehens aufgezeigt (Integrieren hängt von der Existenz von Stammfunktionen ab) und ein Zugang über Summieren von Rechteckflächen motiviert. In der zweiten grünen Ebene wird dieser Weg mithilfe eines Applets anschaulich dargestellt und der zugrunde liegende Grenzprozess anschaulich erlebbar gemacht.

Zu 1.4: Hier werden in vielfältigen Anwendungssituationen Bestandsrekonstruktionen thematisiert und der Umgang mit ihnen geübt. Das Basiswissen stellt als Musterbeispiel sowohl die grundlegende Kompetenz des Übersetzungsvorgangs von Texten in mathematische Ansätze und Operationen dar, als auch die sprachliche Formulierung von Ansätzen und Antworten wie sie allgemein gefordert sind. Flexibles, verstehensorientiertes Arbeiten wird durch Probleme ergänzt, die nicht algorithmisch durch unmittelbare Anwendung des Hauptsatzes zu lösen sind (Aufgabe 8 bis 10) und Modellierungsaktivitäten erzeugen und üben.

Zu 1.5: Dieser Lernabschnitt ist dem zweiten Grundkonzept des Integrierens gewidmet, der Bestimmung von Inhalten krummlinig berandeter Flächen. Weil inhaltlich eng zusemmengehörig, werden die beiden Grundfragen („Fläche zwischen Kurve und x-Achse" und „Fläche zwischen zwei Kurven" parallel eingeführt und gemeinsam in einem Basiswissen dargestellt. Die Übungsphase ist dann modular gestaltet, indem zunächst Flächen zwischen Kurven und der x-Achse behandelt werden, ehe dann Flächen zwischen zwei Kurven Thema sind. Die enge Nähe wird auf einer gelben Merkkarte festgehalten. Mit „Parabelsegmenten" (innermathematisch) und „Lorenzkurve und Gini-Koeffizient" (Anwendung) werden zwei komplexere Probleme angeboten, die eine binnendifferenzierende Bearbeitung ermöglichen. Den Abschluss der Übungsphase bilden „gebietsübergreifende Übungen", mit denen Vernetzungen zu alten Inhalten hergestellt werden, um Nachhaltigkeit, auch im Sinne einer Abiturvorbereitung, zu erzeugen. Die zweite grüne Ebene gibt einerseits ein Angebot für anspruchsvollere Probleme (z. B. für Schüler mit Mathematik als P-Fach) anderseits wird der Begriff des Integrals als Mittelwert thematisiert.

Lösungen

1.1 Von der Änderung zum Bestand

10 **1** *Zumanjaro: Drop of Doom – der höchste Fallturm der Welt*

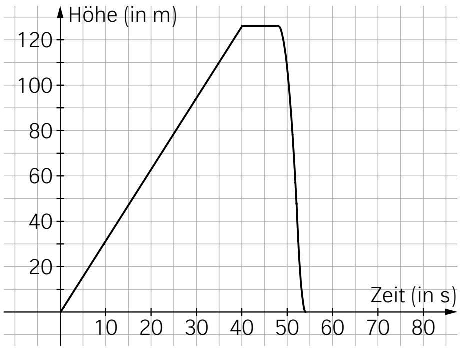
a)

Zeitintervall (in min)	Aktion
t∈[0; 40]	Die Passagiere werden mit der konstanten Geschwindigkeit $3{,}15\,\frac{m}{s}$ nach oben befördert.
t∈[40; 48]	Die Gondel steht in 126 m Höhe still.
t∈[48; 52]	Die Gondel fällt nach unten. Dabei steigt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis ca. $40\,\frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 144\,\frac{km}{h}$.
t∈[52; 54]	Durch den Bremsvorgang verringert sich die Geschwindigkeit gleichmäßig.
t = 54	Die Gondel hält am Ausgangspunkt an.

b) Der Bremsvorgang beginnt nach 52 s in einer Höhe von ca. 48 m.

c)

Zeit in s	10	20	30	40	48	50	52	54
Höhe in m	31,5	63	94,5	126	126	ca. 106	ca. 48	0



d) Die Höhe im Diagramm gibt jeweils den bis zu diesem Zeitpunkt durch das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm mit der x-Achse eingeschlossenen Flächeninhalt an.

2 *Der Zufluss liefert die Füllmengen – ein vereinfachtes Beispiel*

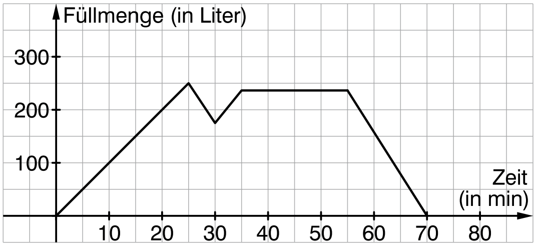
a)

Zeitintervall (in min)	Aktion
t∈[0; 25]	Konstanter Zufluss: 10 l/min
t∈[25; 30]	Konstanter Abfluss: –16 l/min
t∈[30; 35]	Konstanter Zufluss: 14 l/min
t∈[35; 55]	Keine Aktion
t∈[55; 70]	Konstanter Abfluss: –16 l/min

Der Zufluss bzw. Abfluss ist die Änderungsrate des Wasserbestandes in der Badewanne.

b)

Zeitpunkt t (in min)	Füllmenge (in Liter)
5	50
10	100
15	150
20	200
25	250
30	170
35	240
…	240
55	240
60	160
65	80
70	0



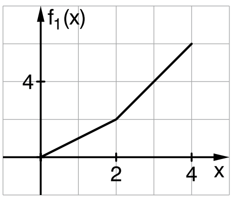
Der Graph Zeit → Füllmenge beschreibt Inhalte der Flächen, die im Intervall [0; t] zwischen dem Zuflussgraphen und der Zeitachse eingeschlossen sind. Die Flächeninhalte oberhalb der Zeitachse im Zuflussdiagramm vergrößern und die unterhalb der Zeitachse verkleinern die Füllmenge.

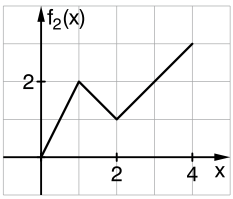
c)

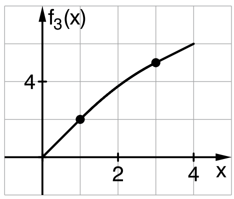
Zeitpunkt t (in min)	Füllmenge (in Liter)
20	$20 \cdot 10 = 200$ Inhalt des Rechtecks
25	$25 \cdot 10 = 250$ Inhalt des Rechtecks
30	$25 \cdot 10 - 5 \cdot 16 = 170$ Inhalt des Rechtecks oberhalb der Zeitachse minus Inhalt des Rechtecks unterhalb der Zeitachse
70	$25 \cdot 10 - 5 \cdot 16 + 5 \cdot 14 + 20 \cdot 0 - 15 \cdot 16 = 0$ Inhalte der Rechtecke oberhalb der Zeitachse gehen mit positivem Vorzeichen und die Inhalte der Rechtecke unterhalb der Zeitachse gehen mit negativem Vorzeichen in die Bilanz ein.

d) Die Badewanne ist nach 70 Minuten leer.
Der Graph der Füllmenge wird um 30 Einheiten nach oben verschoben.

12 3 *Zufluss bekannt, Bestand gesucht*

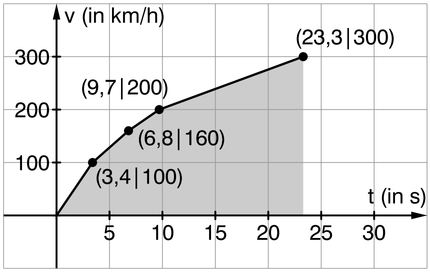






13 **4** *Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Rennwagens*

Mögliches Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (Modell Streckenzug):



Bis der Wagen 300 $\frac{km}{h}$ schnell ist, legt er nach dem oben gewählten Modell ca. 1,26 km zurück. Lösungsweg: Die zurückgelegte Wegstrecke entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Geschwindigkeit. Dieser Inhalt beträgt ca. 4534 Einheiten, wobei

1 Einheit $= 1\,s \cdot 1\,\frac{km}{h} = \frac{1}{3600}\,km$ gilt.

Die Wegstrecke beträgt also $4534 \cdot \frac{1}{3600}\,km \approx 1{,}26\,km$.

5 *Zwei Lastkähne*

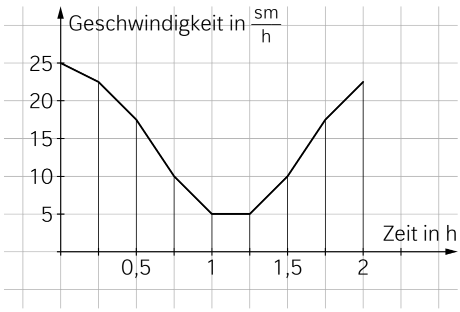
a) Kurt fährt stets mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Luise startet mit 0 $\frac{km}{h}$, ihre Geschwindigkeit steigt proportional zu der Zeit in den ersten 3 Stunden und erreicht 30 $\frac{km}{h}$. Diese Geschwindigkeit wird in den folgenden 2 Stunden beibehalten. Von der 5. bis zur 9. Stunde bremst Luise von 30 $\frac{km}{h}$ auf 5 $\frac{km}{h}$.

b) Nach 9 Stunden sind Kurt 180 km und Luise ca. 175 km gefahren. Kurt ist also etwas weiter gefahren.

c) $0 < t < 5$: Kurt ist vorn
$5 < t < 8{,}2$: Luise ist vorn
$8{,}2 < t$: Kurt ist vorn
Insbesondere nach 9 Stunden ist Kurt vorn.

6 *Ein Schiff*

Lösung: Die gegebenen Werte sind in das Diagramm eingetragen. Da es keine zusätzlichen Informationen über die Geschwindigkeit des Schiffes zwischen den Messungen gibt, verbinden wir die Messpunkte durch Streckenzüge. Der zurückgelegte Weg kann mithilfe der Fläche unter dem Graphen geschätzt werden. Die Gesamtfläche wird als Summe der Flächeninhalte von Trapezen berechnet. Jedes der Trapeze ist 0,25 LE breit.



Berechnung:

$$A = 0{,}25 \cdot \left(\tfrac{1}{2}(25+22) + \tfrac{1}{2}(22+17) + \tfrac{1}{2}(17+10) + \tfrac{1}{2}(10+5) + \tfrac{1}{2}(5+5) + \tfrac{1}{2}(5+10) + \tfrac{1}{2}(10+19) + \tfrac{1}{2}(19+24)\right)$$
$$= 28{,}125$$

Interpretation:

Das Schiff legte von 10:00 bis 12:00 Uhr etwa 28 sm zurück.

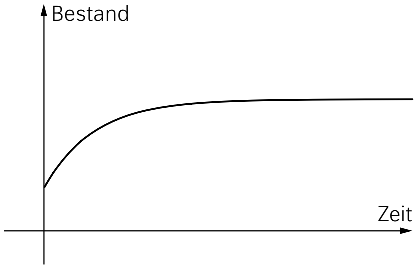
7 *Gewinn – Verlust*

a) Gewinn in Zeitintervallen [0; 9] und [14; 18], Verlust im Zeitintervall [9; 14].
(Die Zeitangabe bedeutet das Ende eines Monats.)

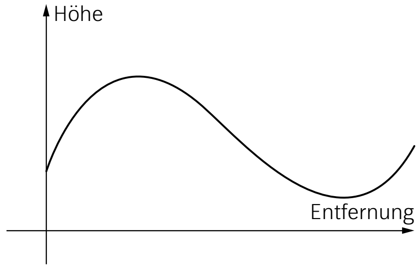
b) Gesamter Gewinn beträgt ca. $1575 - 350 + 600 = 1825$ (in Tausend €).

13 **8** *Tiere und ein Gebirgsprofil*

a) Tierpopulation



b) Gebirgsprofil



14 **9** *Elefantenrennen*

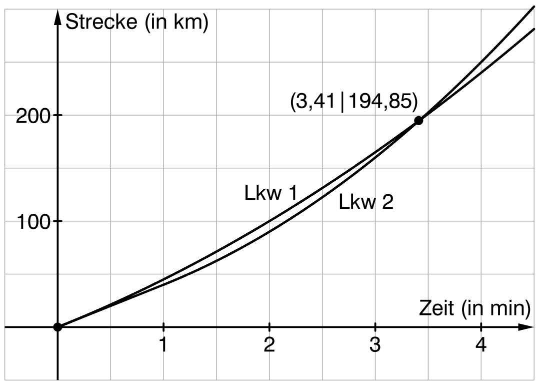
Die Aussagen stimmen. Das überholende Fahrzeug muss laut Text innerhalb von 45 s eine um mindestens 50 m + 25 m + 50 m = 125 m größere Strecke zurücklegen als das überholte Fahrzeug. Diese Bedingung wird bei 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eingehalten:

Der Streckenunterschied nach 45 s ist die Differenz der orientierten Flächeninhalte der beiden Fahrzeuge im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

Sie beträgt $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 45\,\text{s} = \frac{10\,000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 45\,\text{s} = 125\,\text{m}$.

10 *Fahrtenschreiber*

a) Der Lkw 1 fährt mit gleichmäßiger Beschleunigung von 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pro Minute und überholt so den Lkw 2, der in der ersten Minute mit 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt.
Der Lkw 2 beschleunigt dann aber seinerseits in den folgenden 3 Minuten und ist ab dem Zeitpunkt t_2 schneller als Lkw 1.
Die Bestandsfunktion der Geschwindigkeit ist die im Zeitintervall [0; t] zurückgelegte Strecke.



b)

Begründung im Kontext der Sachsituation:	Begründung anhand des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms
Der Lkw 1 war zu jedem Zeitpunkt in [0; t_1] schneller als der Lkw 2 und hat deshalb im selben Zeitintervall eine größere Strecke zurückgelegt.	Der zurückgelegten Strecke entspricht der orientierte Flächeninhalt unter dem Graphen der Geschwindigkeit. Dieser orientierte Flächeninhalt in [0; t_1] ist bei Lkw 1 größer als bei Lkw 2.

c) Der Lkw 2 überholt den Lkw 1 zum Zeitpunkt $t \approx 3{,}4$ min.

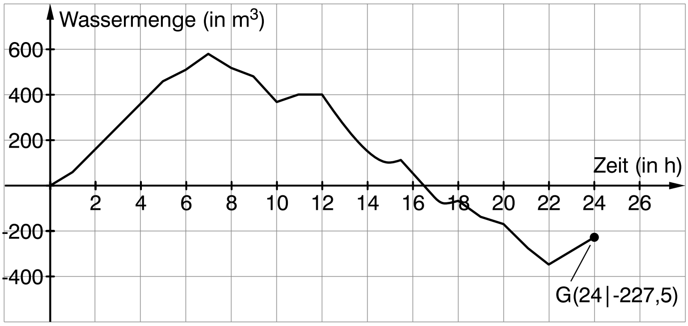
15 **11** *Pumpspeicherwerk*

a)

Graph oberhalb der Zeitachse	Graph unterhalb der Zeitachse
Das Wasser fließt in den Speichersee. Je höher der Graph der Zuflussrate, desto schneller fließt das Wasser in den See.	Das Wasser fließt aus dem Speichersee. Je tiefer der Graph der Zuflussrate, desto schneller fließt das Wasser aus dem See.

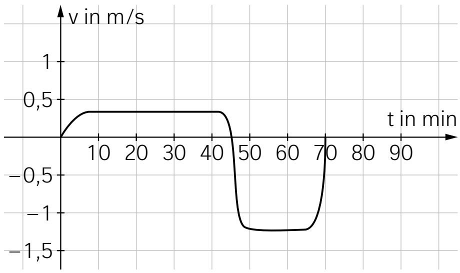
b) Schätzung: Die Wassermenge hat sich um ca. 200 m³ bis 230 m³ verringert.

c) Graph Zeit → zugeflossene Wassermenge:



12 *Eine Ballonfahrt*

a) Der Ballon steigt 25 Minuten lang mit wachsender Geschwindigkeit und mit konstanter Beschleunigung. Danach bleibt die Wachstumsgeschwindigkeit bis zum Zeitpunkt 38 Minuten annähernd konstant. Danach fällt die Wachstumsgeschwindigkeit.



Nach ca. 43 Minuten sinkt der Ballon mit abnehmender Geschwindigkeit 5 Minuten lang, ehe er ca. 18 Minuten lang mit konstanter Geschwindigkeit sinkt. Danach sinkt der Ballon zwar weiter, aber mit abnehmender Geschwindigkeit (etwas langsamer), ehe er nach ca. 70 Minuten landet.

- Höhe nach 30 Minuten: Flächeninhalt unter der Kurven beträgt ca. 4 Kästchen, also ca. 1200 m.
- Maximale Steighöhe: nach ca. 43 Minuten erreicht; also die Fläche unter der Kurve in [0; 43]; entspricht ca. 6 Kästchen, also ca. 1800 m.

b) Die Fläche oberhalb der t-Achse mit dem Graphen ist größer als die Fläche unterhalb der t-Achse mit dem Graphen.
Die Schätzung der Fläche unterhalb der t-Achse ergibt ca. 5 Kästchen, also ca. 1500 m.
Der Ballon landet auf einem Berg, der ca. 300 m höher liegt als der Starplatz.

c) Die Fläche oberhalb der t-Achse muss kleiner sein als die Fläche unterhalb der t-Achse.

1.2 Von der Ableitung zur Bestandsfunktion – Stammfunktionen

16 **1** *Fahren mit einem Elektroauto*

a) In den ersten 20 Sekunden beschleunigt das Auto von $0\,\frac{m}{s}$ auf $30\,\frac{m}{s}$ und fährt mit erreichter Geschwindigkeit weitere 12 Sekunden.

b) Wegstrecke: $10\,s \cdot 30\,\frac{m}{s} = 300\,m$ (Geometrisch: Flächeninhalt des gefärbten Rechtecks)

c) Die „Wegfunktion“ kann ermittelt werden, indem man eine Funktion sucht, deren Ableitung die Änderungsfunktion (hier die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion) ergibt.
Funktion für den Geschwindigkeitsverlauf in [0; 20]:
$f(x) = -\frac{3}{40}(x-20)^2 + 30 = -\frac{3}{40}x^2 + 3x$
Mögliche Wegfunktion in [0; 20]:
$F(x) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{3}{2}x^2$
$F(30) = 675$
Das Auto hat in den ersten 30 s 675 m zurückgelegt.

2 *Befüllen eines Wasserbeckens*

a) Berechnung über Flächen:

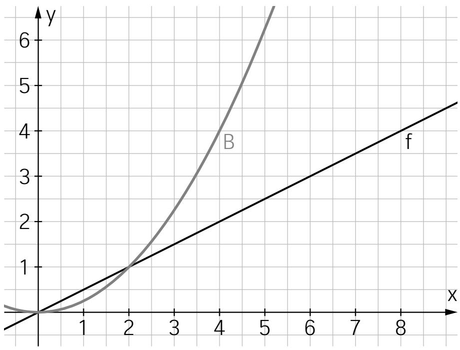
Zeit (in min)	1	5	10
Wassermenge (in l)	26	250	800

b) $f'(t) = f(t)$
Die Funktion der Zuflussrate ist die Ableitung der Wasserstandsfunktion.

c) $f(4) = 176$; $6t^2 + 20t = 250$; $t = 5$ (vgl. a)

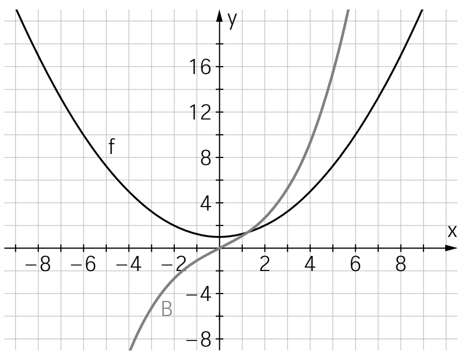
17 **3** *Bestandsfunktionen aus Änderungsfunktionen bestimmen*

a) $B(x) = \frac{1}{4}x^2$
$B'(x) = \frac{1}{2}x = f(x)$
$A_{[0;3]} \approx 2\frac{1}{4} = B(3)$
$A_{[0;5]} \approx 6\frac{1}{4} = B(5)$



b) $B(x) = \frac{1}{12}x^3 + x$

$A_{[0;3]} \approx 5{,}25 = B(3)$
$A_{[0;5]} \approx 15{,}42 = B(5)$



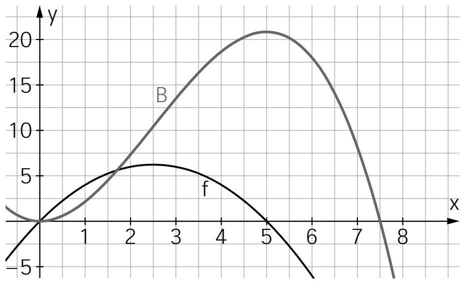
c) $f(x) = x(5 - x) = -x^2 + 5x$

$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$

$B'(x) = -x^2 + 5x = f(x)$

$A_{[0;3]} \approx 13{,}5 = B(3)$

$A_{[0;5]} \approx 20{,}8 = B(5)$



4 *Änderungsfunktionen und Bestandsfunktionen*

a) Die passenden Paare: (1) – (D), (2) – (C), (3) – (B), (4) – (A)

b) Gesucht ist jeweils die Funktion f, sodass ihre Ableitung mit f′ übereinstimmt.

(1)	$f'(x) = 2$	$f(x) = 2x$	(D)
(2)	$f'(x) = -1{,}5 + 0{,}5x$	$f(x) = -1{,}5x + 0{,}25x^2$	(C)
(3)	$f'(x) = 0{,}25\,(x - 4)^2$ $= 0{,}25x^2 - 2x + 4$	$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x$	(B)
(4)	$f'(x) = 3 - x$	$f(x) = 3x - 0{,}5x^2$	(A)

18 5 *Unterschiedliche Anfangsbestände und Bestandsfunktionen*

(1) Es gilt: $v(t) = s'(t)$ für $s(t) = -0{,}025t^3 + 1{,}5t^2 + c$ aufgrund der Ableitungsregel für kontante Summanden.
Im Sachkontext beschreiben die verschiedenen Funktionen s(t) unterschiedliche Startpunkte des Elektroautos.

(2) $B(t) = 6t^2 + 20t + 100$ bzw. $B(t) = 6t^2 + 20t + 300$

6 *Regeln für das Bestimmen von Bestandsfunktionen erkunden*

(1) $B(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + c$ (2) $B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + c$ (3) $B(x) = -\frac{1}{10}x^5 + x^3 - x + c$

19 7 *Training*

a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$

b) $F(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^2$

c) $F(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 8x$

d) $F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{4}x^4$; $f(x) = x^2 - x - 6$

e) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

f) $F(x) = 4 \cdot \cos(x)$

g) $F(x) = -\frac{1}{24}x^6 + 4x^3 - 8$

h) $F(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x$

i) $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$

j) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

8 *Zusammenhänge zwischen Ableitung und Funktion – Stammfunktionen klären*

a) (1) f′ hat zwei Nullstellen mit VZW
(Hochpunkt an der Stelle −1; Tiefpunkt an der Stelle 3).

(2) f′ ist in [−1; 3] negativ.

(3) f′ hat einen lokalen Extrempunkt an der Stelle 1, also hat f einen Wendepunkt an der Stelle 1.

(4) Beim Wendepunkt ($x_W = 1$) gilt: $f'(x_W) < 0$.

b) $f'(x) = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ verläuft durch $(0|1)$

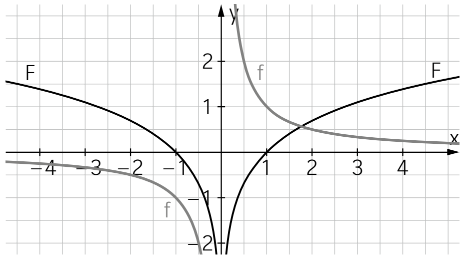
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{11}{3}$ verläuft durch $(1|0)$

19 **9** *Eine Lücke bei den Stammfunktionen*

Für $n = -1$ wäre $F(x) = \frac{1}{0}x^0$.

Da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist, kann mit der Potenzregel keine Stammfunktun für $f(x) = \frac{1}{x}$ angegeben werden.

f gibt für jeden x-Wert die Steigung von F an. Da f die x-Achse als Asymptote hat, wird die Steigung nie 0, also steigt der Graph von F immer weiter an. Man kann aber nicht zwingend erschließen, ob sie über alle Grenzen wächst. Die Stammfunktion von $\frac{1}{x^2}$ ist $-\frac{1}{x}$, diese wächst nicht über alle Grenzen.



20 **10** *Freier Fall auf dem Mond*

	Fallzeit t **(Gesucht ist t mit $1{,}4 = s(t) = \frac{1}{2}g\,t^2$)**	**Aufprallgeschwindigkeit** **$v(t) = g\,t$ mit der Fallzeit t**
Mond **$g = 1{,}67\,\frac{m}{s^2}$**	ca. 1,29 s	ca. $2{,}16\,\frac{m}{s}$
Erde **$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$**	ca. 0,53 s	ca. $5{,}24\,\frac{m}{s}$

11 *Wachsende Beschleunigung*

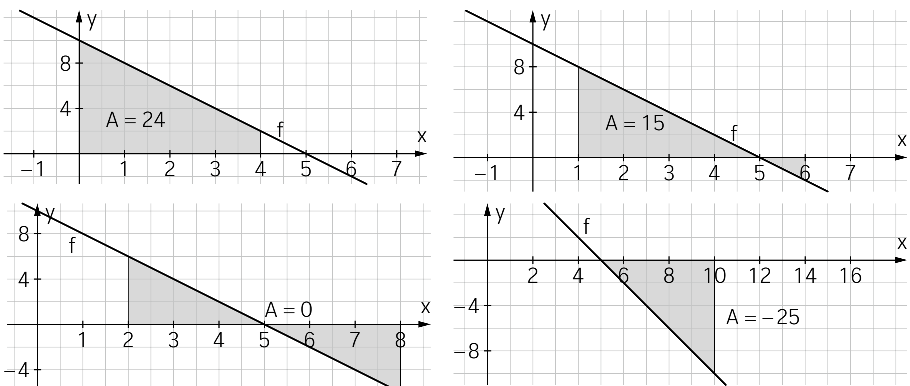
Das Fahrzeug hat 25 m zurückgelegt.

Lösungsweg: $v(t) = 0{,}6t^2 \Rightarrow s(t) = 0{,}2t^3 \Rightarrow s(5) = 25\,m$

1.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

21 **1** *Zu- und Abflüsse zu verschiedenen Startpunkten*

a)



Flächeninhalte unterhalb der x-Achse werden subtrahiert.

b) Durch das Vertauschen der Grenzen dreht sich das Vorzeichen des berechneten Flächeninhaltes um.

21 **2** *Flächeninhalte*

a) Der orientierte Inhalt zwischen a und b ist die Differenz aus dem orientierten Inhalt von 0 bis b und 0 bis a.

b) (1) Stammfunktion: $F(x) = x^2$; $F(3) = 9$, also $I_0(3) = 9$; $I_0(0{,}5) = 0{,}25$
Orientierter Inhalt zwischen 0,5 und 3: $I = 8{,}75$

(2) Stammfunktion: $F(x) = x^3$; $I_0(2) = 8$; $I_0(1) = 1$
Orientierter Inhalt zwischen 1 und 2: $I = 7$.

22 **3** *Berechnung von Integralen*

Hauptsatz: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ mit einer Stammfunktion F zu f

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
15	−16	4	1	$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$	$\frac{40}{3} = 13{,}\overline{3}$	0	28

23 **4** *Training: Integrale und Gleichungen*

a) $c = 24$ b) $b = -3$ oder $b = 5$ c) $a = -2$ oder $a = 2$ d) $a = 0$ oder $a = 0{,}5$

5 *Integrationsregeln 1*

(1) Der Flächeninhalt unter f in den Grenzen a und c setzt sich lückenlos aus den beiden Teilstücken zusammen. Die Summe der einzelnen Flächenstücke ergibt daher den gesamten Flächeninhalt.

(2) −f ergibt sich aus f durch Spiegelung an der x-Achse. Die Flächeninhalte sind daher zwar gleich groß, beachtet man aber die Orientierung der Flächen, haben diese entgegengesetzte Vorzeichen.

6 *Integrationsregeln 2*

a) $\int_a^b 2x^2\,dx = \frac{2}{3}b^3 - \frac{2}{3}a^3 = 2\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = 2 \cdot \int_a^b x^2\,dx$

$$\begin{aligned}\int_a^b (x^2 - x + 1)\,dx &= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^2 + b - \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a\right)\\ &= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 + \left(-\frac{1}{2}b^2 + b - \left(-\frac{1}{2}a^2 + a\right)\right)\\ &= \int_a^b x^2\,dx + \int_a^b (-x + 1)\,dx\end{aligned}$$

b) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\,F(b) - k\,F(a) = k\,(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$

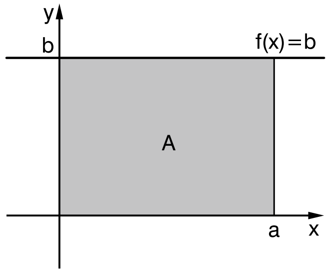
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= F(b) + G(b) - \left(F(a) + G(a)\right)\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

23 **7** *Eine bekannte Formel*

Für positive Zahlen a und b gilt

$\int_0^a b = [b \cdot x]_0^a = b \cdot a - b \cdot 0 = b \cdot a.$

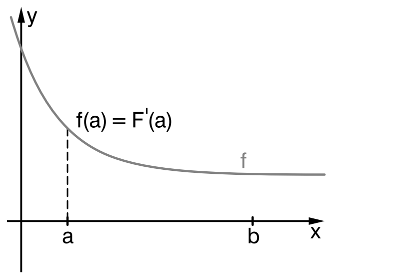
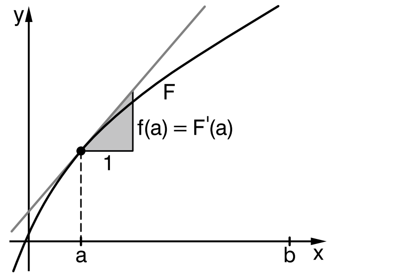
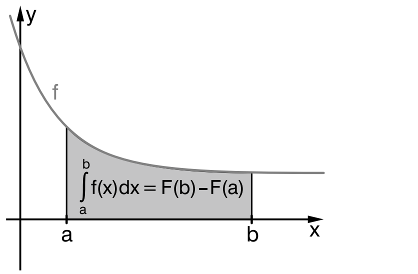
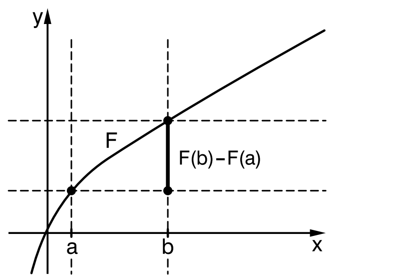
Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist gleich Breite · Höhe = a · b.



8 *Der Größe nach ordnen*

(5) < (2) < (4) < (3) < (1) < (6)

24 **9** *Terme veranschaulichen*

	Veranschaulichung am Graphen von f	Veranschaulichung am Graphen von F
(1) und (3)	 Der Term steht für den Wert der Funktion f an der Stelle a.	 Der Term steht für die Steigung der Funktion F an der Stelle a.
(2) und (4)	 Der Term steht für den orientierten Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse in [a; b].	 Der Term steht für den Zuwachs von F in [a; b].

25 **10** *Lesen, Wiedergeben und Verstehen*

Siehe gelber Kasten S. 25

11 *Unter- und Obersummen*

- Die Unter- und Obersummen wachsen so lange wie f oberhalb der x-Achse liegt.
- Bei grober Einteilung (wenig Rechtecke) ist der Unterschied von Ober- und Untersumme groß, wenn die Unterteilung des Intervalls feiner wird, nähern sich die Werte einander an.
- Die Ortskurven der Unter- und Obersumme sind Näherungen der Integralfunktion, im Grenzfall konvergieren beide gegen die Integralfunktion.

1.4 Bestände rekonstruieren

26 **1** *Auf Tauchgang*

a) Es gilt $f(x) < 0$ für $x \in [0; 4]$, also taucht das Boot in den ersten 4 s ab. Nach 4 s erreicht es seine größte Tauchtiefe, da es für $x \in [4; 8]$ ein größeres Stück wieder auftaucht als es für $x \in [8; 10]$ wieder abtaucht.

b) Das Boot befand sich zu Beginn der Messung nicht an der Wasseroberfläche, da die von f eingeschlossenen Flächeninhalte unterhalb der x-Achse insgesamt kleiner sind als die Flächeninhalte oberhalb der x-Achse.

c) $A_{[0;4]} = \left| \int_0^4 f(x) \right| \approx 137{,}73$ $\qquad A_{[4;8]} = \int_4^8 f(x) \approx 44{,}89$

$A_{[8;10]} = \left| \int_8^{10} f(x) \right| \approx 7{,}16$ $\qquad A_{[10;15]} = \int_{10}^{15} f(x) \approx 212{,}5$

$-A_{[0;4]} + A_{[4;8]} - A_{[8;10]} + A_{[10;15]} = 112{,}5$

2 *Befüllen eines Beckens*

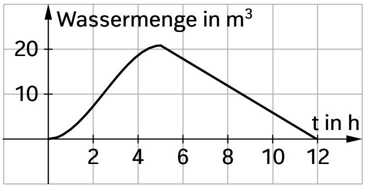
a) Das Wasser fließt zunächst zunehmend schneller ein. Nach 2,5 Stunden fließt es am schnellsten, ehe es dann zunehmend langsamer zufließt.

b) $\int_0^5 v(t)\,dt = \frac{125}{6}$; es fließen ca. 21 m^3 zu.

$\int_2^4 v(t)\,dt = \frac{34}{3}$; Zwischen der 2. und 4. Stunde fließen ca. 11,3 m^3 zu.

c) Nach knapp 7 Stunden ist das Wasser abgeflossen.

d)



28 **3** *Pflanzenbestand*

a) Der Bestand nimmt in den ersten 12 Jahren zu (die Zuwachsrate ist dann positiv) und in den folgenden 8 Jahren ab (die Zuwachsrate ist dann negativ).

b) Der maximale Bestand ist am Ende der Wachstumsphase, d. h. nach 12 Jahren, erreicht.

c) Der maximale Bestand beträgt $100 + \int_0^{12} f(x)\,dx \approx 140$ Pflanzen.

Der minimale Bestand ist nicht am Ende der Abnahmephase, d. h. nach 20 Jahren, erreicht, sondern zu Beginn der Beobachtung $(x = 0)$, denn zu jedem Zeitpunkt $x > 0$ wird die Gesamtänderung (Zuwachs) $\int_0^x f(t)\,dt$ positiv sein. Bestandswerte zum Vergleich: $F(0) = 100$; $F(20) = 126{,}\overline{6}$; für $0 \le x \le \frac{20}{3}$ gilt $100 \le F(x) \le 126{,}\overline{6}$

4 *Gewinnentwicklung*

a) Am Ende des 0-ten Monats beträgt der Verlust 1200 €/Woche. Bis Mitte des 3. Monats werden die Verluste geringer, daraufhin und bis zur Mitte des 12. Monats werden wöchentlich Gewinne erzielt; der maximale wöchentliche Gewinn ist am Ende des 8. Monats zu verzeichnen. Kurz vor Ablauf des Jahres endet die Zeitspanne der wöchentlichen Gewinne.

b) In den ersten 4 Monaten spricht man besser von einem Gesamtverlust von

$\int_0^4 f = -960\,€ \left(\text{Einheit: } \frac{1\,€}{1\text{ Woche}} \cdot 1\text{ Monat} \approx \frac{1\,€}{7\text{ Tage}} \cdot \frac{365\text{ Tage}}{12} \approx 4{,}345\,€\right).$

Der Gesamtverlust beträgt $-960 \cdot 4{,}345\,€ = 4171\,€$.

Der Gesamtgewinn von Beginn des 2. Monats (d. h. vom Ende des 1. Monats) bis zum Ende des 10. Monats beträgt $\int_1^{10} f = 19125\,€$, wobei eine Einheit 4,345 € beträgt.

Das ergibt den Gesamtgewinn von $19125 \cdot 4{,}345\,€ \approx 83098\,€$.

28 5 *Helikopter*

a) $f_1 \to$ (B); $f_2 \to$ (A); $f_3 \to$ (C)

Gemeinsamkeiten (A), (B), (C)	**Unterschiede**
■ Eine Steigphase am Anfang, eine Sinkphase zum Schluss ■ zunächst zunehmend, dann abnehmende Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeiten. (Graphen immer Rechtskurve → Linkskurve)	■ Zeitpunkte des Übergangs vom Steigen ins Sinken. ■ Maximale Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit ■ Maximale Höhe ■ Höhe der Landestelle

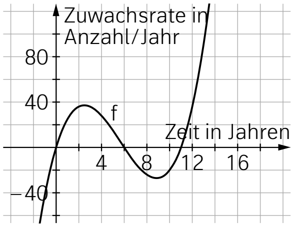
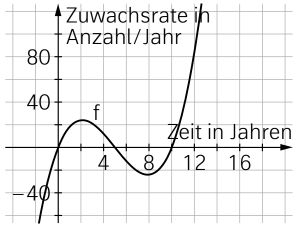
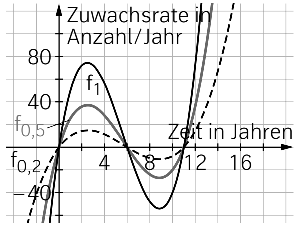
Nullstellen: Übergänge vom Steigen ins Sinken und umgekehrt

Extrempunkte: Maximale Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit

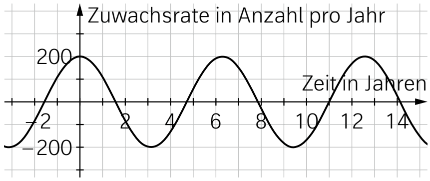
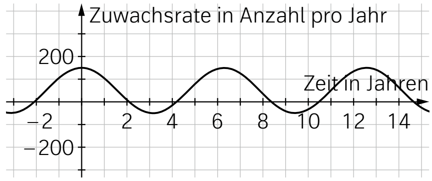
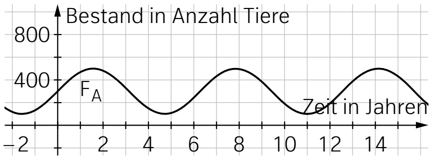
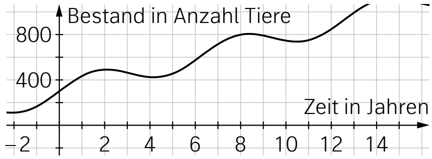
b) Anmerkung: Wegen der Realsituation reichen grafisch-numerische Lösungen für die Berechnung der Integrale und Extremstellen aus.

	(A)	(B)	(C)
Höhe nach einer Minute	$\int_0^{60} f_2(x)\,dx = -180\,m$	$\int_0^{60} f_1(x)\,dx = 0\,m$	$\int_0^{60} f_3(x)\,dx = 180\,m$
Höchste Punkte	$\int_0^{20} f_2(x)\,dx = 33{,}\overline{3}\,m$	$\int_0^{30} f_1(x)\,dx = 141{,}75\,m$	$\int_0^{50} f_3(x)\,dx = 182{,}3\,m$
Maximale Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit	Steigen: nach ca. 9 s: ≈ 2,52 m/s Sinken: nach ca. 44 s: ≈ 8,45 m/s	Steigen: nach ca. 13 s: ≈ 7,27 m/s Sinken: nach ca. 47 s: ≈ 7,27 m/s	Steigen: nach ca. 18 s: ≈ 6 m/s Sinken: nach ca. 44 s: ≈ 0,34 m/s
Landung auf Ausgangshöhe		(B)	

29 **6** *Variationen der Änderungsrate eines Tierbestandes*

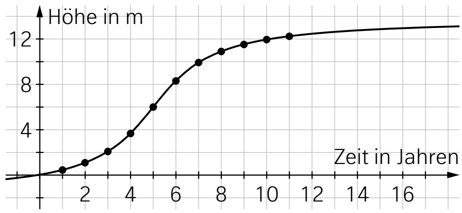
a)	b)	c)
 Der Bestand nimmt in den ersten 6 Jahren zu $(f(x) > 0)$ und in den folgenden 5 Jahren ab $(f(x < 0))$. Im letzten Jahr nimmt er wieder zu.	 Der Bestand nimmt in den ersten 5 Jahren zu $(f(x) > 0)$ und in den folgenden 5 Jahren ab $(f(x < 0))$. In den letzten beiden Jahren nimmt er wieder zu.	 Im Sachzusammenhang beeinflusst k die Größe der Zuwachsrate. Das Verhältnis der Flächeninhalte zueinander wird von k als konstantem Faktor nicht beeinflusst. Die Zeiträume der Zu-bzw. Abnahme entsprechen den Zeiträumen in a)
■ Da die Fläche in [6; 11] unterhalb der x-Achse deutlich größer ist als die Fläche oberhalb der x-Achse in [11; 12], nimmt der Tierbestand in den letzten 6 Jahren insgesamt ab, der maximale Bestand ist am Ende des 6. Jahres erreicht: $10 + \int_0^6 f(x) = 154$ Der maximale Bestand beträgt 154 Tiere. ■ Die Fläche unterhalb der x-Achse ist kleiner als die Fläche oberhalb, also war der Anfangsbestand von 10 Tieren der niedrigste. $10 + \int_0^{12} f(x) = 82$ Der Bestand nach 12 Jahren beträgt 82 Tiere.	■ Da die mit der x-Achse eingeschlossenen Flächeninhalte augenscheinlich ungefähr gleich groß sind, müssen hier die Flächeninhalte berechnet werden: $\int_0^5 f(x) = 78{,}125$ $\int_5^{10} f(x) = -78{,}125$ $\int_{10}^{12} f(x) = 72$ Der maximale Bestand von ca. 128 Tieren ist nach 5 Jahren erreicht. ■ Die Fläche unterhalb der x-Achse ist kleiner als die Fläche oberhalb, also war der Anfangsbestand von 50 Tieren der niedrigste. $50 + \int_0^{12} f(x) = 122$ Der Bestand nach 12 Jahren beträgt 122 Tiere.	■ Der Bestand ist zu denselben Zeitpunkten maximal/ minimal wie in a). Die Größe des Bestandes hängt jedoch von k ab: $10 + \int_0^6 f_k(x) = 10 + 288\,k$ Der maximale Bestand beträgt $10 + 288\,k$ Tiere ■ Der minimale Bestand entspricht dem Anfangsbestand von 10 Tieren. $10 + \int_0^{12} f(x) = 10 + 144\,k$ Der Bestand nach 12 Jahren beträgt $10 + 144\,k$ Tiere
Extrempunkte von f: HP $\approx (2{,}49 \mid 37{,}2)$ TP $\approx (8{,}85 \mid -27{,}1)$ $f(2{,}49) \approx 37{,}19$ $f(8{,}85) \approx -27{,}11$ Maximale Zuwachsrate nach knapp 2,5 Jahren mit Rate von ca. 37 Tieren/Jahr. Minimale Zuwachsrate nach gut 9 Jahren mit Abnahmerate von ca. 27 Tieren/Jahr.	Extrempunkte von f: HP $\approx (2{,}11 \mid 24{,}1)$ TP $\approx (7{,}89 \mid -24{,}1)$ $f(2{,}11) \approx 24{,}1$ $f(7{,}89) \approx -24{,}1$ Maximale Zuwachsrate nach gut 2 Jahren mit Rate von ca. 24 Tieren/Jahr. Minimale Zuwachsrate nach gut 8 Jahren mit Abnahmerate von ca. 24 Tieren/Jahr.	Die Zeitpunkte der maximalen/minimalenZuwachsrate sind unabhängig von k, die Größe der Raten hängt aber jeweils von k ab: $f_k(2{,}49) \approx 74{,}38\,k$ $f_k(8{,}85) \approx -54{,}23\,k$ Maximale Zuwachsrate nach knapp 2,5 Jahren mit Rate von ca. 74 k Tieren/Jahr. Minimale Zuwachsrate nach gut 9 Jahren mit Abnahmerate von ca. 54 k Tieren/Jahr.

29 **7** *Eine Fuchspopulation*

	Revier A	Revier B
a)	 t∈[0; 1,6] Bestandszunahme t∈[1,6; 4,7] Bestandsabnahme t∈[4,7; 7,9] Bestandszunahme t∈[7,9; 10] Bestandsabnahme	 t∈[0; 2,1] Bestandszunahme t∈[2,1; 4,2] Bestandsabnahme t∈[4,2; 8,4] Bestandszunahme t∈[8,4; 10] Bestandsabnahme
b)	Stärkstes Wachstum für $t = 0$ und $t = 6{,}3$ Stärkste Abnahme für $t = 3{,}1$ und $t = 9{,}4$ Geringste Änderung für $t \in \{1{,}6; 4{,}7; 7{,}9\}$	Stärkstes Wachstum für $t = 0$ und $t = 6{,}3$ Stärkste Abnahme für $t = 3{,}1$ und $t = 9{,}4$ Geringste Änderung für $t \in \{1{,}6; 4{,}7; 7{,}9\}$
c)	$F_A(t) = 200\sin(t) + 300$  $F_A(0) = 300 = F_B(0)$ $F_A(1{,}9) \approx 490 \approx F_B(1{,}9)$	$F_B(t) = 100\sin(t) + 50t + 300$ 
d)	$F_A(1) \approx 468$ $F_A(2) \approx 482$ $F_A(3) \approx 328$ $F_A(4) \approx 149$ $F_A(5) \approx 108$ $F_A(10) \approx 191$	$F_B(1) \approx 434$ $F_B(2) \approx 491$ $F_B(3) \approx 464$ $F_B(4) \approx 424$ $F_B(5) \approx 454$ $F_B(10) \approx 746$

8 *Ein Bambus*

Es ist keine Stammfunktion zu f bekannt ("Polynom im Nenner"). Die Höhe des Bambus zum Zeitpunkt $t = 0$ ist nicht bekannt, diese muss zu den Werten in der Tabelle hinzuaddiert werden, um die tatsächliche Höhe des Bambus zu erhalten.



Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Höhe in m	0,4	1	2	3,6	6	8,3	9,9	10,9	11,5	11,9	12,2

Der Bambus wird etwas höher als 12 m.

30 **9** *Eine Quelle*

Die Wassermenge, die in den ersten 8 Tagen fließt, lässt sich abschätzen, indem man die Punkte gradlinig verbindet und den Flächeninhalt zwischen den Verbindungslinien und der x-Achse abschätzt. Hierzu kann jeweils der Mittelwert zwischen zwei angegebenen Werten als Fließgeschwindigkeit gewählt werden:

$$A = 1000\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{d}}\left(2\,\mathrm{d}\cdot\frac{(480+385)}{2} + 2\,\mathrm{d}\cdot\frac{(385+335)}{2}\ldots\right) \approx 2\,790\,000\,\mathrm{l}$$

Mit diesem Modell lässt sich aber keine Aussage über den Zeitpunkt des Versiegens der Quelle treffen. Hierzu benötigen wir eine Funktionsgleichung, die die Fließgeschwindigkeit beschreibt:

Modell 1: lineare Regression mit $f_1(t) = -23{,}6t + 450{,}7$

Wassermenge in 8 Tagen in diesem Modell: $\int_0^8 f_1(t)\,dt = 2\,850\,400\,l$

$f_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 19{,}1$

In diesem Modell versiegt die Quelle nach ca. 19 Tagen.

$\int_0^{19} f_1(t)\,dt = 4\,303\,500\,l$

Modell 2: exponentielle Regression mit $f_2(t) = 459{,}6 \cdot 0{,}93^x$

Wassermenge in 8 Tagen in diesem Modell: $\int_0^8 f_2(t)\,dt = 2\,789\,230\,l$

In diesem Modell versiegt die Quelle nie ganz. Allerdings wird die Liefermenge irgendwann verschwindend gering. Beispielsweise kann die Quelle als versiegt gelten, wenn pro Tag weniger als 50 l Wasser fließen.

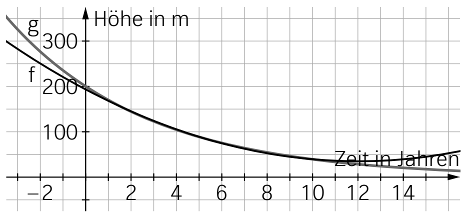
$f_2(t) = 0{,}05 \;\Rightarrow\; t = 125{,}8$

Nach 126 Tagen fließen weniger als 50 l Wasser pro Tag.

Bis zu diesem Zeitpunkt hat die Quelle bereits $\int_0^{126} f_2(t)\,dt = 6\,332\,460\,l$ geliefert.

10 *"Vorauseilende" Ersatzteilproduktion*

Die bekannten Regeln für Stammfunktionen geben keine Bestandsfunktion für Exponentialfunktionen an.



Modell 1: f(t) lässt sich im Intervall [0; 10] gut durch $g(t) = 1{,}1(x-12)^2 + 35$ annähern (siehe Grafik).

$\int_0^{10} g(t)\,dt \approx 981$

Modell 2: Flächeninhalt unter dem Graphen näherungsweise durch Rechtecke der Breite 2 Jahre annähern.

$A = 2\big(f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9)\big) \approx 984$

31 **11** *Wasser im Keller*

a) Die Phasen b und d stellen 2 Leistungsstufen der Wasserpumpe dar. In den Phasen a, c und e wird an-, um- bzw. ausgeschaltet. Zeitintervalle (in min):

a	b	c	d	e
[0; 0,5]	[0,5; 1,5]	[1,5; 2]	[2; 4]	[4; ca. 6,08]

b) $A \approx 45\,l$

c) Grafischer Verlauf ist ähnlich der Darstellung im Bild. In den „Stoßpunkten“ stimmen die Funktionswerte überein. An den Stellen 0,5; 2 und 4 stimmen die Steigungen überein (jeweils gleich Null).

Die Gesamtmenge des abgepumpten Wassers beträgt ca. 44,42 Liter:

$$\int_0^{0{,}5} a(x) + \int_{0{,}5}^{1{,}5} b(x) + \int_{1{,}5}^{2} c(x) + \int_2^4 d(x) + \int_4^{6{,}08} e(x) \approx 44{,}42$$

31 **12** *Schweinezucht – mit und ohne Medikament*

a) Wesentlich stärkere Zunahme zwischen 8. und 14. Tag bei Behandlung. Zwischen 4. und 6. Tag stärkere Zunahme , wenn nicht behandelt.

b) Die Flächen oberhalb der Zeitachse entsprechen der Gewichtszunahme in kg; die Flächen unterhalb der Zeitachse entsprechen dem Gewichtsverlust in kg im Zeitraum [5; 17] (in Tagen). Bei dem behandelten Ferkel B ist die Gewichtszunahme größer und der Gewichtsverlust kleiner als bei dem unbehandelten Ferkel A.

c) Das Integral $\int_5^{17} f_A(t)dt$ gibt die Gesamtänderung des Gewichts des Ferkels A vom 5. bis zum x-ten Lebenstag an. Entsprechende Bedeutung hat $\int_5^{17} f_B(t)dt$ für das Ferkel B. Die Differenz der beiden Integrale bedeutet den Unterschied bei der Gesamtänderung des Gewichts der beiden Ferkel im Zeitraum [5; 17]. Ist diese Differenz negativ, so hat die Behandlung zu besserem Wachstum geführt.

1.5 Flächen berechnen

32 **1** *Fläche zwischen Graphen und x-Achse*

Flächeninhalt der gefärbten Fläche (in FE):

(1) $\int_1^3 f = \frac{16}{3} = 5{,}\overline{3}$ (2) $\left|\int_{-2}^{-1} f\right| + \int_{-1}^{3} f = 13$

(3) $\left|\int_{-2}^{-1} f\right| + \int_{-1}^{3} f + \left|\int_{3}^{3{,}5} f\right| = 13 + \left|-\frac{13}{24}\right| = \frac{325}{24} \approx 13{,}54$

Problem: Die Integralfunktion gibt die Bilanz der orientierten Flächeninhalte an. Die geometrischen Inhalte der Flächen müssen daher einzeln berücksichtigt werden und dürfen nicht negativ sein.

Verfahren zur Bestimmung eines geometrischen Flächeninhalts:

- Einzelne Flächenstücke identifizieren.
- Die orientierten Inhalte der Flächenstücke einzeln berechnen.
- Beträge der orientierten Flächeninhalte bilden und addieren.

2 *Fläche zwischen zwei Graphen*

Einfacher Spezialfall:

Schnittstellen: $x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 7 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Die gefärbte Fläche entsteht, wenn man von der Fläche zwischen g und der x-Achse die Fläche zwischen f und der x-Achse subtrahiert. Entsprechend gilt für die Flächeninhalte:

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx - \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6\right) dx = 16$$

1. Verallgemeinerung:

Man könnte denken, dass zunächst Teilflächen berechnet werden müssen, weil die Fläche teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse liegt, aber:

Wenn man beide Graphen so weit in y-Richtung verschiebt, dass die Fläche vollständig oberhalb der x-Achse liegt, erhält man den einfachen Spezialfall, Verschiebungen (Kongruenzabbildungen) verändern nicht Flächeninhalte, formal:

$$A = \int_a^b (f + k) - \int_a^b (g + k) = \int_a^b (f + k - (g + k)) = \int_a^b (f - g)$$

In diesem Fall erhält man denselben Flächeninhalt wie beim einfachen Spezialfall, weil man die Fläche hier erhält, indem man die dortige an y = 2 spiegelt.
2. Verallgemeinerung:
Schnittstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$
Strategie:

- Von Schnittstelle zu Schnittstelle vorgehen
- Immer „Funktion oberhalb minus Funktion unterhalb“.

$$\int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = 11\frac{5}{6}$$

34 **3** *Schätzen und rechnen*
Alle Flächeninhalte in FE:

a) $A = \left|\int_{-1}^{1} f\right| = \frac{2}{3}$ b) $A = \left|\int_{-1}^{1} f\right| = \frac{4}{3}$ c) $A = \left|\int_{-1}^{2} f\right| = \frac{17}{4}$ d) $A = \left|\int_{-3}^{-2} f\right| + \left|\int_{-2}^{2} f\right| + \left|\int_{2}^{3} f\right| = \frac{23}{6}$

In Auflage 1 (2018) passen Graph und Funktionsgleichung in d) leider nicht zusammen.
Nach Anschauung muss die Funktion f die Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ haben.

e) $A = \left|\int_{0}^{\pi} f\right| = 2$ f) $A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\right| = 3$

35 **4** *Training*
Alle Flächeninhalte in FE:

a) Nullstellen von f: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$; $A = \left|\int_{-1}^{\sqrt{2}} f\right| + \left|\int_{\sqrt{2}}^{3} f\right| \approx 8{,}44$

b) Nullstellen von f: $-2, 2$; $A = \left|\int_{-4}^{-2} f\right| + \left|\int_{-2}^{2} f\right| + \left|\int_{2}^{4} f\right| = 32$

c) Nullstellen von f: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; $A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f\right| = 4$

d) f hat keine Nullstellen; $A = \left|\int_{1}^{4} f\right| = \frac{3}{4}$

e) Nullstelle von f: 1 $A = \left|\int_{-2}^{1} f\right| + \left|\int_{1}^{2} f\right| = \frac{19}{2}$

f) Nullstellen von f: $-\pi, 0, \pi$; $A = \left|\int_{-\pi}^{0} f\right| + \left|\int_{0}^{\pi} f\right| = 4$

5 *Integrale und Flächeninhalte 1*
$a = -2$; $b = 0$; $c = 3$

(1) $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = -\frac{125}{24}$: Orientierter Inhalt, den f mit x-Achse umschließt.

(2) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = -\frac{125}{24}$: Orientierter Inhalt, den f mit x-Achse umschließt.

(3) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{3} f(x)\,dx = \frac{253}{24}$: Inhalt der Fläche, die f mit x-Achse umschließt.

35 **6** *Integrale und Flächeninhalte 2*

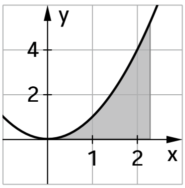
Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse liefern beide Integrale dasselbe Ergebnis. Diese Methode kann immer angewendet werden, wenn f symmetrisch zur y-Achse ist und wenn die Grenzen vom Betrag her gleich groß sind.

7 *Integrale und Flächeninhalte 3*

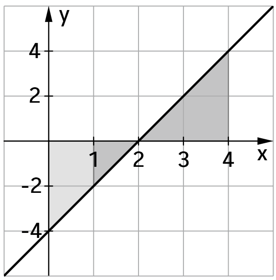
Die Integrale ergeben beide den Wert 0, obwohl der Flächeninhalt zwischen den Graphen und der x-Achse offensichtlich nicht 0 ist. Allerdings ist der orientierte Flächeninhalt unterhalb der x-Achse aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung jeweils genauso groß wie der orientierte Flächeninhalt oberhalb der x-Achse, allerdings mit unterschiedlichem Vorzeichen.
Diese Phänomen tritt bei allen zum Ursprung punktsymmetrischen Randfunktionen auf, wenn die Grenzen vom Betrag her gleich groß sind.

8 *Parameterwerte bestimmen 1*

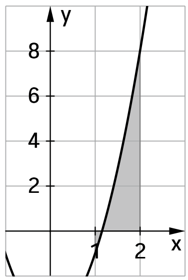
(1) $a = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}289$



(2) $a_1 = 0;\ a_2 = 4$



(3) $a = -4$



9 *Parameterwerte bestimmen 2*

a) $\int_0^1 f_k(x)\,dx = -2;\ k = \frac{7}{3}$

b) $\int_{-2}^{2} f_k(x)\,dx = 0;\ k = \frac{4}{3}$

36 **10** *Flächen zwischen Graphen - schätzen und rechnen*

a) $A = \int_{-1}^{1} \left((2x+4) - (x^2+2x+3)\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$

b) $A = \int_{-2}^{2} \left((2x+7) - (x^2+2x+3)\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$

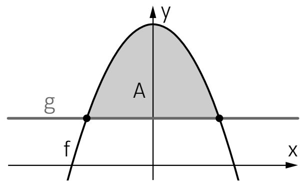
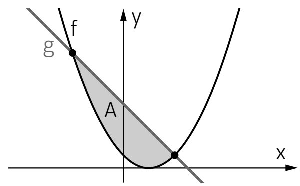
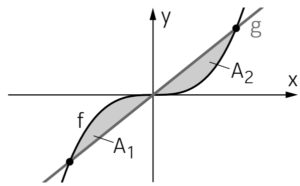
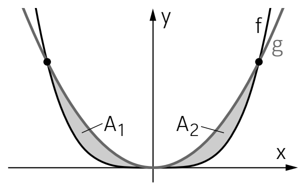
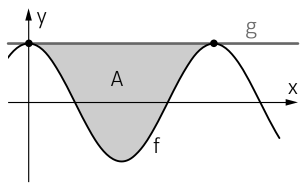
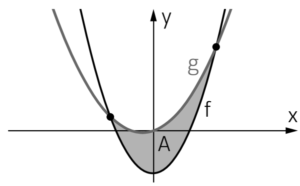
c) Drei Schnittstellen: −1; 0; 3

$$A = \int_{-1}^{0} \left((x^3 - 3x) - 2x^2\right)dx + \int_{0}^{3} \left(2x^2 - (x^3 - 3x)\right)dx = \frac{71}{6} = 11{,}8\overline{3}$$

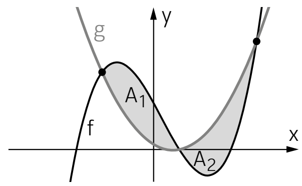
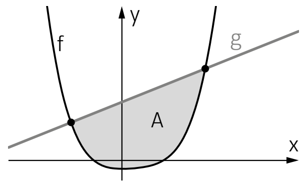
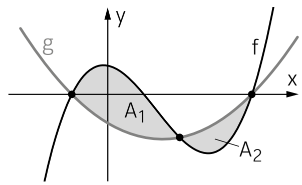
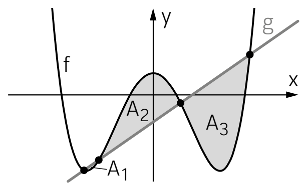
36 11 *Training "zu Fuß"*

Lösungsmuster: Die Schnittstellen x_1; …; x_n von f und g werden bestimmt.

Die eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $A = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}(f-g)\right| + \ldots + \left|\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(f-g)\right|$.

	Schnittstellen	Flächeninhalt A	Grafik
a)	$-2\sqrt{2} \approx -2{,}83$; $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$	$\frac{32\sqrt{2}}{3} \approx 15{,}08$	
b)	-2; 2	$\frac{32}{3} \approx 10{,}67$	
c)	-2; 0; 2	8	
d)	-1; 0; 1	$\frac{4}{3} \approx 1{,}33$	
e)	0; 2π	$2\pi \approx 6{,}28$	
f)	-2; 3	$\frac{125}{6} \approx 20{,}83$	

36 **12** *Training mit GTR*

	Schnittstellen	Flächeninhalt A	Grafik
a)	−2; 1 ; 4	40,5	
b)	−1,22; 2	21,51	
c)	−1; 2; 4	21,08	
d)	−2,54; −2; 1; 3,54	92,7	

13 *Integrale und Flächeninhalte 4*

$\int_{-1}^{3} f(x) - g(x)\,dx = -\frac{32}{3} = \int_{-1}^{3} h(x)\,dx$ Vgl. gelber Kasten auf S.36

37 **14** *Schmuckstücke im Parabeldesign*

Seien A_1, A_2, A_3 die Flächeninhalte der Schmuckstücke entsprechend den Abbildungen 1, 2 und 3. Das 1. Schmuckstück hat die größten Materialkosten, denn es gilt $A_1 > A_2 = A_3$.
Begründung: Um jeweils die gleichen Flächeneinheiten zu verwenden, ist die Wahl eines einheitlichen Koordinatensystems sinnvoll, z. B.: Das dargestellte Quadrat entspreche dem Fensterausschnitt $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$.
Bild 1: Geschickte Zerlegung und Verschiebung ergeben ein flächengleiches Rechteck, $A_1 = 2$ FE.
Bild 2 und Bild 3, einige alternative Begründungen (mit unterschiedlichen Modellierungen) anhand von Symmetrieüberlegungen:

Die Gesamtfläche des Schmuckstücks ist jeweils 4-mal so groß wie die Fläche zwischen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$ in $[0; 1]$: $A_2 = A_3 = 4 \cdot \int_0^1 (f - g) = \frac{4}{3}$ FE Analog wie oben: $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = (x - 1)^2$ für A_3	Die Gesamtfläche des Schmuckstücks ist jeweils 8-mal so groß wie die Fläche zwischen $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ in $[0; 1]$: $A_2 = A_3 = 8 \cdot \int_0^1 (f - g) = \frac{4}{3}$ FE

37 **15** *Parabelsegmente*

a) Beispiel für eine Beschreibung: Wenn der Streifen von links nach rechts wandert, nimmt der Umfang solange ab, bis die Symmetrieachsen des Streifens und der Parabel übereinstimmen. Danach nimmt der Umfang immer mehr zu.

b)

Funktionen	Schnittstellen	Streifenbreite	Flächeninhalt $A = \int_{x_1}^{x_2} (g - f)$
f und g_1	$-2; 2$	4	$\frac{32}{3} = 10{,}\overline{6}$
f und g_2	$0; 4$	4	$\frac{32}{3} = 10{,}\overline{6}$
f und g_3	$-1; 3$	4	$\frac{32}{3} = 10{,}\overline{6}$

Vermutung: Der Flächeninhalt bleibt konstant.
Für die Konstruktion der Segmente $\left(\text{mit } P(a\,|\,a^2),\ Q\left(a+4\,|\,(a+4)^2\right)\right)$ gilt allgemein

$g(x) = (2a+4)(x-a) + a^2$ und damit $A = \int_a^b (g - f) = \frac{32}{3} = 10{,}\overline{6}$.

Das bestätigt die Vermutung für $f(x) = x^2$ und die Streifenbreite 4.

c) (A) Mit dem Makro erhält man allgemein für die Schnittgeraden g_t:

$g_t(x) = 2(t+2) \cdot x - t(t+4)$

Allgemeine Schnittpunkte: $x = t$ und $x = t + 4$

$$\int_t^{t+4} g_t(x) - f(x)\,dx = \frac{32}{3}$$

Die Vermutung gilt für beliebige Segmente der Breite 4.

(B) Mit dem Makro erhält man allgemein für die Schnittgeraden g_{tk}:

$g_{tk}(x) = 2k(t+2) \cdot x - t(t+4)$

Allgemeine Schnittpunkte: $x = t$ und $x = t + 4$

$$\int_t^{t+4} g_{tk}(x) - f_k(x)\,dx = \frac{32}{3}k$$

Die Vermutung gilt auch für $f_k(x) = kx^2$ für beliebige Segmente der Breite 4.

(C) Mit dem Makro erhält man allgemein für die Schnittgeraden g_{tb} bei beliebiger Breite b:

$g_{tb}(x) = (2t+b) \cdot x - t(t+b)$

Allgemeine Schnittpunkte: $x = t$ und $x = t + b$

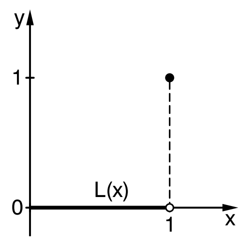
$$\int_t^{t+b} g_{tb}(x) - f(x)\,dx = \frac{b^3}{6}$$

Die Vermutung gilt auch für beliebige Segmente der Breite b.

38 **16** *Gerechte und ungerechte Verteilungen*

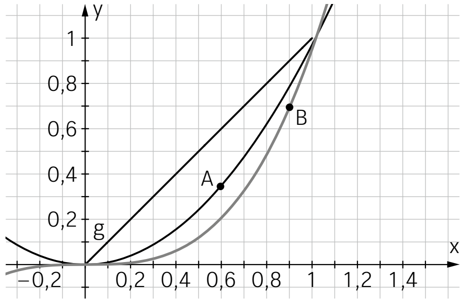
a) $L(x) = x$ bedeutet eine Gleichverteilung des Einkommens: x % der Bevölkerung besitzen x % des verfügbaren Einkommens. Das gilt für alle x mit $0 \le x \le 1$.
Gini-Koeffizient: $G = 0$

b) Größtmögliche Ungerechtigkeitsverteilung: „Einer besitzt alles."
Gini-Koeffizient: $G = 1$
Lorenzkurve: $L(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \end{cases}$



38 **17** *Fiktiver Ländervergleich*

$A(0{,}6) = 0{,}35$
$B(0{,}9) = 0{,}75$
$G_A \approx 0{,}354$
$G_B \approx 0{,}526$



18 *Einkommensverteilung*

Dezil	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Vollz.besch. Arbeitn.	2,5	7,2	13,4	20,8	29,2	38,2	48,7	61,3	76,2	99,3
Arbeitn. insg.	0,5	2,1	5	10,3	17,7	27,5	39,3	53,7	71,5	94,9

Modell 1: quadratische Regression (mit Berücksichtigung von (0|0) als Punkt der Regression)

$L_{vollz.}(x) = 0{,}81x^2 + 0{,}134x + 0{,}01$ mit $G_{vollz.} \approx 0{,}306$

$L_{insg.}(x) = 1{,}18x^2 - 0{,}28x + 0{,}02$ mit $G_{insg.} \approx 0{,}453$

Modell 2: kubische Regression (mit Berücksichtigung von (0|0) als Punkt der Regression)

$L_{vollz.}(x) = 0{,}57x^3 - 0{,}04x^2 + 0{,}46x - 0{,}01$ mit $G_{vollz.} \approx 0{,}302$

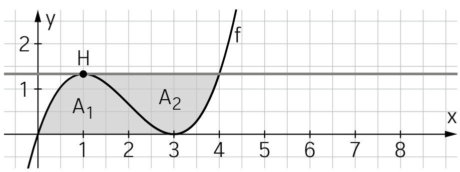
$L_{insg.}(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}44x^2 + 0{,}01x$ mit $G_{insg.} \approx 0{,}447$

Die Berechnungen zeigen, dass bei beiden Modellen die Einkommensverteilung bei den Arbeitnehmern insgesamt ungerechter ist als bei den vollzeitbeschäftigten Arbeitnehmern. Man kann daraus (vorsichtig) schließen, dass die Einkommensverteilung bei den Teilzeitbeschäftigten Arbeitnehmern sehr ungerecht ist.

39 **19** *Flächeninhalte, Tangente und Wendepunkt*

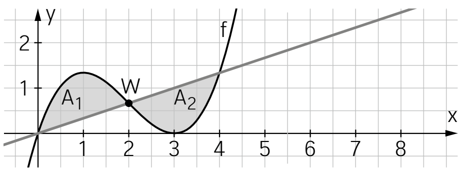
a) $A_1 = \frac{9}{4}$

b) $H\left(1\,\middle|\,\frac{4}{3}\right)$; $A_2 = \frac{9}{4}$



c) $W\left(2\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$; $A_3 = \int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right)dx = \frac{4}{3}$

$A_3 = A_4$, da f punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

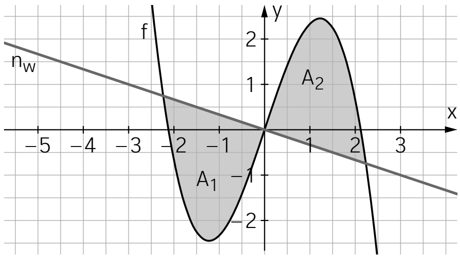


39 **20** *Normale, Tangente, Steigungen und eine Parameterbestimmung*

a) $n_w(x) = -\frac{1}{3}x$ $\quad A_1 + A_2 = \frac{50}{6} \approx 8{,}32$

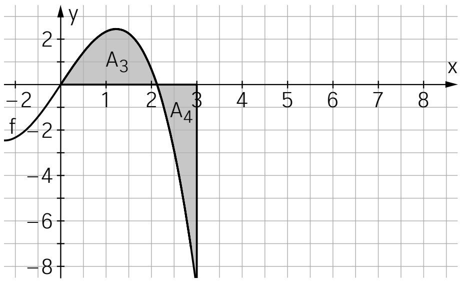
b) $x_1 = -2$ $\quad x_2 = 2$

Die Steigung ist im Wendepunkt maximal, hier gilt $f'(x_w) = 3$



c) $k = 3$ (oder $k = -3$)

$A_3 = A_4$



21 *Ein Firmenlogo*

a) Der untere Rand wird beschrieben durch $g(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.

$f'(x) = 4x^3 - 4x$ also gilt $f'(-1) = f'(1) = 0$

b) $A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{32}{15} \approx 2{,}13$

Der höchstmögliche Preis/m² beträgt 37,50 €.

c) $A_{rot} = A_{gelb} = 0{,}597$

$A_{grün} = A_{blau} = 0{,}469$

Die Trennungslinien treffen den Rand nicht in den Wendepunkten. WP $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \,\middle|\, \pm\frac{4}{9}\right)$.

40 **22** *Parabelhalbierung mithilfe passender Geraden*

a) Die gesuchte Gerade: $g(x) = 9 - \left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \approx 3{,}33$

Lösungsbeispiel:

Nullstellen von f: -3; 3

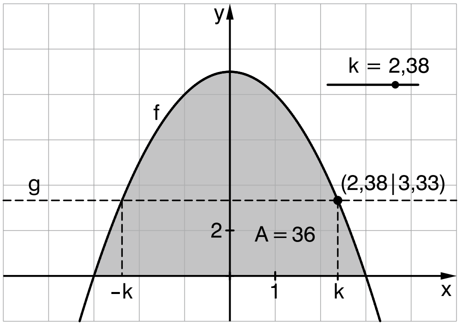
Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein: $A = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 36$ (in FE).

Schnittstellen der gesuchten Geraden g mit dem Graphen von f seien $-k$ und k.

$\Rightarrow$ $g(x) = 9 - k^2$ (g ist konstante Funktion)

f und g schließen miteinander die Fläche mit Inhalt $\int_{-k}^{k} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \frac{4}{3}k^3$ ein.

Dieser Flächeninhalt soll halb so groß wie A sein: $\frac{4}{3}k^3 = \frac{1}{2}A \;\Rightarrow\; k = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}38$



b) Die gesuchte Gerade: $g(x) = \left(3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)x \approx 0{,}62\,x$

Lösungsbeispiel:

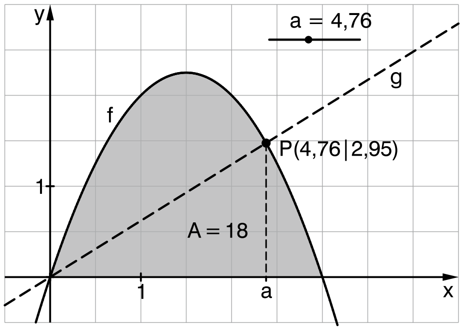
Nullstellen von f: 0; 6

Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein: $A = \int_0^6 f(x)\,dx = 18$ (in FE)

Die gesuchte Gerade schneidet den Graphen von f in den Punkten $(0|0)$ und $P\left(a|f(a)\right)$ mit $0 < a < 6$; sie hat also die Steigung $\frac{f(a)}{a} = 3 - 0{,}5\,a$. $\Rightarrow$ $g(x) = (3 - 0{,}5\,a)\,x$

f und g schließen miteinander eine Fläche mit Inhalt $\int_a^0 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \frac{a^3}{12}$ ein.

Dieser Flächeninhalt soll halb so groß wie A sein: $\frac{a^3}{12} = \frac{1}{2}A \;\Rightarrow\; a = 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \approx 4{,}76$



40 **23** *Wandernder Streifen*

Der Streifen ist so zu legen, dass $k = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \approx 2{,}3$ gilt.

Lösungsbeispiel:

f hat die Nullstellen 0 und 6. Das blaue Flächenstück hat den Inhalt

$$A(k) = \int_k^{k+3} f = -\frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{9}{2}k + \frac{45}{8}.$$

An der Stelle $k = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \approx 2{,}3$ ist dieser Flächeninhalt maximal.

24 *Flächenstücke*

a) Die gesuchte Funktionsgleichung: $g(x) = \frac{1}{4}$

Rechnung: $A_1 = A_2 \;\Leftrightarrow\; A_1 + (-A_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 (t^3 - x^3)\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

Probe: $A_1 = A_2 = \frac{3}{32} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}118$ (in FE)

b) Die gesuchte Funktionsgleichung: $g(x) = \frac{1}{8}$

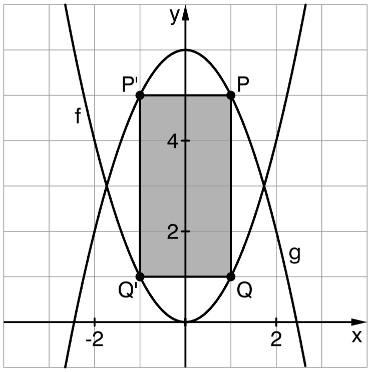
Rechnung: $A_1(t) + A_2(t) = \int_0^t (t^3 - x^3)\,dx + \int_t^1 (x^3 - t^3)\,dx = 1{,}5\,t^4 - t^3 + 0{,}25$;

Minimum für $t = \frac{1}{2}$

Dann gilt: $A_1 + A_2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$ (in FE)

40 **25** *Ein maximales Rechteck*

Lösungsbeispiel: Die Graphen von f und g schneiden sich an den Stellen $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$
Sie schließen die Fläche mit dem Inhalt $8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ (in FE) ein. Die beiden unteren und die beiden oberen Eckpunkte des Rechtecks sind jeweils symmetrisch bezüglich der y-Achse, da f und g achsensymmetrisch sind. Seien $-a$ und a die x-Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks, dabei gelte $0 < a < \sqrt{3}$. Sein Flächeninhalt beträgt
Breite · Höhe $= 2a \cdot \big(g(a) - f(a)\big) = -4a^3 + 12a$.
Dieser Flächeninhalt ist für $a = 1$ am größten und beträgt 8 FE. Die Koordinaten der Eckpunkte sind $P(1|5)$, $Q(1|1)$, $P'(-1|5)$, $Q'(-1|1)$.
Die von f und g umschlossene Fläche ist um den Faktor $\sqrt{3}$ größer.



26 *Puzzeln*

Schnittpunkte: $A(1|2)$, $B(2|1)$, $C(4|4)$; Überschlag: 3 FE; Beispiele für Strategien:

Strategie 1	**Strategie 2**
Eine Gerade durch B parallel zur y-Achse teilt die gefärbte Fläche in zwei Stücke. $A = \int_1^2 (h - g) + \int_2^4 (h - f) = \frac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$ (in FE)	Man berechnet die Inhalte der Flächen, die von h in [1; 4], von g in [1; 2] und von f in [2; 4] mit der x-Achse eingeschlossen werden. $A = \int_1^4 h - \int_1^2 g - \int_2^4 f = \frac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$ (in FE)

41 **27** *Mittlere Tagestemperatur*

Durchschnittliche Temperatur: (A) ca. 19,5236 °C (B) ca. 19,5242 °C
Der prozentuale Unterschied der beiden Werte ist gering und beträgt ca. 0,003 %. Die Methode (B) entspricht der gewählten Modellierung am genauesten. Die Methode (A) nähert sich der Methode (B) bei steigender Anzahl der Ablesepunkte immer mehr.

28 *Mittlerer Gewinn*

Der mittlere Gewinn beträgt 1680 €.

29 *Lagerhaltungskosten*

Die mittleren täglichen Lagerkosten betragen 140 €. Begründung:

Pro Tag werden durchschnittlich $L_M = \frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} L(x)\,dx = 400$ Stück gelagert.

400 Stück $\cdot\, 0{,}35 \frac{€}{\text{Stück}} = 140$ €

Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben zu Kapitel 1

44

1 *Mittlere Durchflussraten*

Es sind ca. 14 040 m^3 Wasser geflossen

Strategie 1:

Rechteckflächen aus Intervallbreite 3 und Mittelwerten in Zeitintervallen bestimmen und aufaddieren.

Strategie 2:

Punkte durch Strecken verbinden (Polygonzug) und Inhalte der einzelnen Trapeze berechnen und addieren.

2 *Zuflussraten*

Abschnitt	Bestandsfunktion	Stetigkeitsbedingung für den Bestand (Bestand ändert sich nicht abrupt)
$0 \le x < 4$	$f_1(x) = 10x$	$f_1(4) = 40 = f_2(4)$
$4 \le x < 7$	$f_2(x) = -2{,}5x^2 + 30x - 40$	$f_2(7) = 47{,}5 = f_3(7)$
$7 \le x \le 10$	$f_3(x) = -5x + 82{,}5$	

Die Steigung der Bestandsfunktionen an den Übergangsstellen $x = 4$ und $x = 7$ stimmen überein: $f_1'(4) = 10 = f_2'(4)$ und $f_2'(7) = -5 = f_3'(7)$.

Der Graph der Bestandsfunktion ist im Intervall [0; 10] knickfrei, die Bestandsfunktion ist dort differenzierbar.

Zum Vergleich: Die Funktion f′ ist im Intervall [0; 10] stetig, aber nicht differenzierbar.

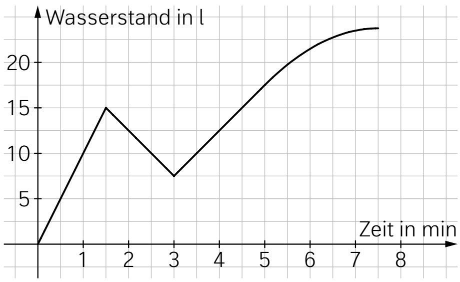
⇒ „Integration glättet“

3 *Ein Wassertank*

a)

Zeit (in min)	1	2	3	4	5	6	7
Wasserstand (in l)	10	12,5	7,5	12,5	17,5	21,5	23,5

b)



c)

Intervall	Zuflussfunktion	Wasserstandfunktion
[0; 1,5]	$f(x) = 10$	$F(x) = 10x$
[1,5; 3]	$f(x) = -5$	$F(x) = -5x + 22{,}5$
[3; 5]	$f(x) = 5$	$F(x) = 5x - 7{,}5$
[5; 7,5]	$f(x) = -2x + 15$	$F(x) = -x^2 + 15x - 32{,}5$

4 *Funktionen und Stammfunktionen*

a)

Funktion f(x)	$x + 1$	x	$x(x^2 - 1)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
Stammfunktion F(x)	$0{,}5x^2 + x$	$0{,}5x^2 - 4$	$0{,}25x^4 - 0{,}5x^2$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$

b) (1) $F(x) = x^2 + tx$ (2) $F(x) = t^2 + xt$

(3) $F(x) = \frac{a}{3}x^3 - abx^2 + abx$ (4) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3}$

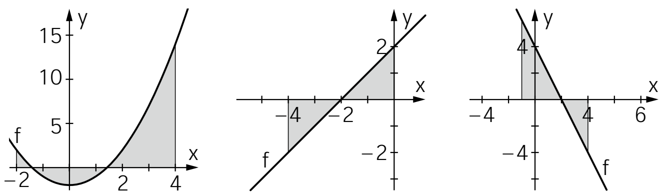
45

5 *Integrale bestimmen*

a)

	a	b	c	f(x)
(1)	−2	4	12	$x^2 - 2$
(2)	−4	0	0	$x + 2$
(3)	−1	4	5	$-2x + 4$

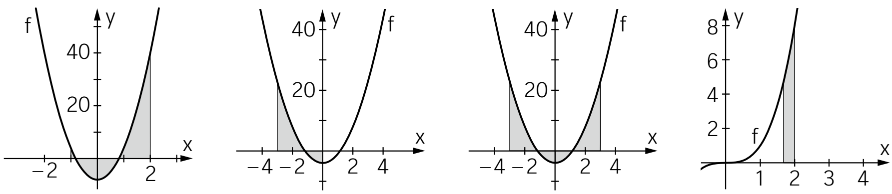
(1) (2) (3)



b)

	a	b	c	f(x)
(1)	−2	4	24	$3x^2 - 2$
(2)	−3	0 oder 2	15	$3x^2 + 2$
(3)	$\sqrt{8} \approx 1{,}68$	2	2	x^3

(1) (2) oder (3)



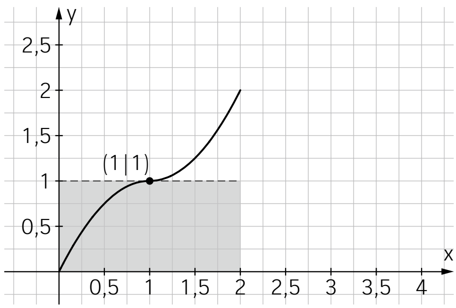
6 *Flächeninhalte bestimmen 1*

(1) $A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^2 (2 - x)\,dx = 0{,}8\overline{3}$

(2) $A = \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\,dx = \frac{27}{4} = 6{,}75$

(3) $A = \int_0^1 (-x + 2x)\,dx + \int_1^2 (x - 2x)\,dx = 2$

Hinweis zu (3):
Die Fläche A lässt sich auch gut ohne Integralrechnung mit Ausnutzen der Symmetrie von Parabeln bestimmen.



7 *Flächeninhalte bestimmen 2*

Lösungsmuster:

$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f\right|$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x$ die Nullstellen von f sind.

	Nullstellen von f	Flächeninhalt A
a)	−3; 3	36
b)	−1; 0; 1	$\frac{1}{4}+\left\|-\frac{1}{4}\right\|=\frac{1}{2}$
c)	−4; 0; 2,5	$48+\left\|-\frac{875}{64}\right\|=\frac{3947}{64}\approx 61{,}672$
d)	−3; 0; 1	$\frac{45}{4}+\left\|-\frac{7}{12}\right\|=\frac{71}{6}=11{,}8\overline{3}$
e)	−2; 0	$\left\|-\frac{4}{3}\right\|=1{,}\overline{3}$
f)	−3; 3	$\left\|-\frac{504}{5}\right\|=100{,}8$

45 **8** *Flächeninhalte bestimmen 3*

Lösungsmuster:

$$A=\left|\int_{x_1}^{x_2}(f-g)\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}(f-g)\right|+\ldots+\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n}(f-g)\right|,$$ wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Schnittstellen von f sind.

	Schnittstellen von f und g	Flächeninhalt A
a)	$-\sqrt{2}; \sqrt{2}$	$4\sqrt{2}\approx 5{,}66$
b)	−1; 2	4,5
c)	−2; 0; 1	$\frac{8}{5}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}\approx 3{,}08\overline{3}$
d)	−1; 1; 3	4 + 4 = 8

9 *Flächeninhalte bestimmen 4*

Verschiedene Lösungswege, z. B. mit Beachtung der Achsensymmetrie:

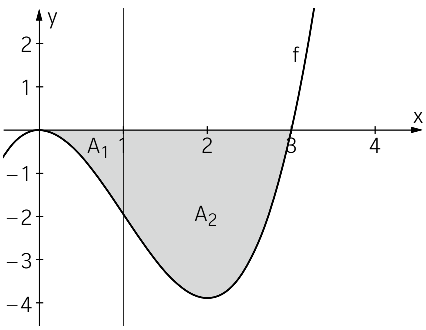
$$A=2\cdot\int_0^3\big(f_1(x)-f_3(x)\big)\,dx=21$$

Hinweis: Zu f_1 gehört das Graphenstück im 1. Quadranten, zu f_2 das im 2. Quadranten und zu f_3 das Graphenstück unterhalb der x-Achse.

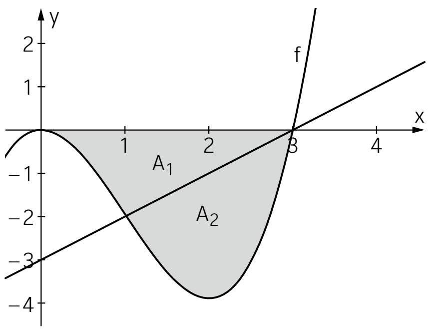
10 *Wendepunkt, Fläche und Flächenverhältnis*

a) $W(1\,|\,-2)$

b) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{-0{,}75}{-6}=\frac{1}{8}$



c) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{-2{,}75}{-4}=\frac{11}{16}$



46 **11** *Wege und Geschwindigkeiten*

B hat den größten Weg zurückgelegt. (A: 40 m, B: 100 m, C: 60 m, D: 40 m, allerdings in die umgekehrte Richtung)

46 **12** *Eine Maus, ein Käsestück und eine Röhre*

a) $t \in \{17; 25; 28\}$

b) größte Geschwindigkeit nach rechts bei ca. $t = 10\,s$
größte Geschwindigkeit nach links bei ca. $t = 21\,s$

c)/d) Unter der Annahme, dass die Aufzeichnung der Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre beginnt, befindet sich die Maus nach 17 s so weit wie möglich rechts, und zwar ca. 2 m von der Mitte entfernt. Da die Flächenanteile oberhalb der x-Achse größer sind, als unterhalb der x-Achse, überquert die Maus die Mitte während der Aufzeichnung nicht wieder. Daher ist sie am Anfang so weit wie möglich links und zwar genau in der Mitte der Röhre. Nach 40 s ist sie also immer noch rechts von der Mitte.

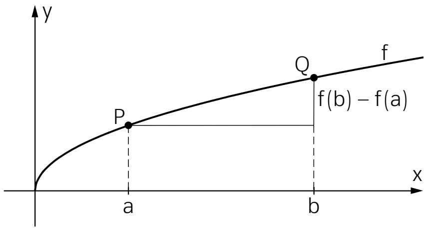
13 *Veranschaulichen und Begründen*

a) Der Einfachheit halber z. B. nur für a, b mit $|a| < 2$, $|b| < 2$. Das Integral ist dann die Bilanz des positiv orientierten Flächeninhalts links von der y-Achse und des negativ orientierten Flächeninhalts rechts von der y-Achse,
(1) wenn $|a| > |b|$ (2) wenn $|a| = |b|$ (3) wenn $|a| < |b|$

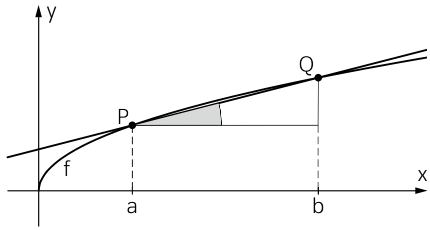
b) c kann eine beliebige reelle positive Zahl sein: Da der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, unterscheiden sich die orientierten Flächeninhalte in $[-c; 0]$ und in $[0; c]$ nur um das Vorzeichen.

14 *Terme veranschaulichen*

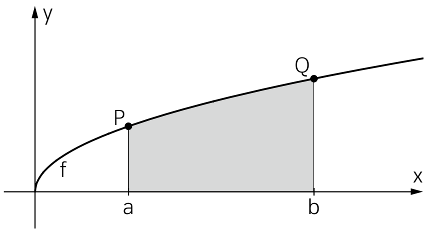
a) Höhe des Steigungsdreiecks



b) Steigung der Sekante durch P und Q



c) Orientierter Flächeninhalt unter f in [a; b]



15 *Aus einem amerikanischen Lehrbuch*

a) A hat zum Zeitpunkt $t = 1\,h$ einen größeren Weg zurückgelegt und ist vorn. Die im Intervall $[0; t]$ jeweils zurückgelegte Strecke entspricht dem orientierten Flächeninhalt unter dem Zeit-Geschwindigkeits-Graphen. Der orientierte Flächeninhalt unter dem roten Graphen ist größer als der unter dem blauen.

b) Die Geschwindigkeiten von A und B sind zum Zeitpunkt $t = 1\,h$ gleich groß. Der rote und der blaue Graph schneiden sich an der Stelle $t = 1\,h$.

c) Für $t = 1\,h$ ist die Beschleunigung von A kleiner als die Beschleunigung von B. Die Beschleunigung ist die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit.
grafisch – Steigung des Geschwindigkeitsgraphen

d) Der Abstand zwischen A und B wird im Zeitintervall [0,75; 1] größer, weil A vorn ist und sich schneller als B fortbewegt. Dem Abstand zwischen A und B zum Zeitpunkt t entspricht der orientierte Inhalt der Fläche, die zwischen den Geschwindigkeitsgraphen von A und B im Intervall [0; t] eingeschlossen ist.Dieser orientierte Flächeninhalt ist für $0{,}75 < t < 1$ positiv und nimmt zu.

47

16 *Von der Emissionsrate zum Gesamtausstoß*

Zunächst muss die Entwicklung der Emissionsrate im Zeitraum [0; 240] modelliert werden. Der freigesetzten Menge G entspricht dann der orientierte Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion der Emissionsrate. Wählt man als Modell einen Streckenzug, dann kann z. B. das Trapezverfahren angewendet werden. Es ist sinnvoll, zusätzlich zu den 4 bekannten Messpunkten einen Punkt an der Stelle $t = 0$ zu wählen. Neben dem gewählten Modell hat auch die Wahl dieses Punktes Einfluss auf den Schätzwert der freigesetzten Gasmenge G.

Bsp. $A(0|22)$: $G = 60 \cdot (0{,}5 \cdot 22 + 9{,}0 + 2{,}4 + 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}1) = 1395$ (in mg)

Bsp. $A(0|44)$: $G = 60 \cdot (0{,}5 \cdot 44 + 9{,}0 + 2{,}4 + 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}1) = 2055$ (in mg)

17 *Ein Benzintank*

In Auflage 1 (2018) ist leider der Funktionsterm in der Aufgabe falsch: Es müsste für $2 < x \le 4$ heißen: $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 4$.

In der Lösung wird dieser berichtigte Term verwendet: $t = 9{,}5\,\text{min}$

18 *Datenübertragung*

Minimale Übertragungsrate: ca. 122 kbit/s (grafisch-numerische Lösung)

Maximale Übertragungsrate: ca. 210 kbit/s (grafisch-numerische Lösung)

Durchschnittliche Übertragungsrate: $u_m = \frac{1}{30-0} \cdot \int_0^{30} u(t)\,dt \approx 158$ (in kbit/s)

Die gesamte übertragene Datenmenge: $\int_0^{30} u(t)\,dt \approx 4736$ (in kbit)

Die Hälfte der Datenmenge wurde zum Zeitpunkt $x \approx 13{,}8\,\text{s}$ übertragen.

Gesucht ist k mit $\int_0^{k} u(t)\,dt = 2368$, Lösung grafisch-numerisch.

19 *Von der Beschleunigung zum Weg*

Das Auto beschleunigt $x \approx 40\,\text{s}$ lang (gesucht ist x mit $a(x) = 0$).

Die Höchstgeschwindigkeit ist am Ende der Beschleunigungsphase erreicht. Die in [0; t] erreichte Geschwindigkeit ist gleich dem orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $a(x)$.

$v_{max} = v(40) = \int_0^{40} a(x)\,dx = 66{,}\overline{6}$ (in m/s, d. h. 240 km/h)

Die Wegstrecke ist gleich dem orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $v(t)$. Für diese letzte gilt $v(t) = \int_0^{t} a(x)\,dx = 5t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{960}t^3$.

Die bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit zurückgelegte Strecke ist

$s(40) = \int_0^{40} v(x)\,dx = 2000$ (in m).

Durchschnittsgeschwindigkeit: $v_m = \frac{1}{40} \cdot \int_0^{40} v(x)\,dx = \frac{1}{40} \cdot s(40) = 50$ (in m/s, d. h. 180 km/h)