Inhaltsverzeichnis

2 Prozent- und Zinsrechnung

verstehen

Grundbegriffe der Prozentrechnung

Wenn du einen Anteil (= **Prozentwert W**) an einer Gesamtheit (= **Grundwert G**) ausdrücken willst, dann bilde den **relativen Anteil** $\mathbf{\frac{W}{G}}$. Verschiedene relative Anteile kannst du direkt miteinander vergleichen, wenn sie denselben Nenner besitzen. Üblicherweise kürzt oder erweitert man auf den **Nenner 100** und bezeichnet dann den zugehörenden Zähler als **Prozentzahl p**, oder aber man gibt den **Prozentsatz** $\mathbf{p\,\% = \frac{p}{100}}$ an.

Beispiel 1: 18 der 30 Schüler aus Bernds Klasse sind in einem Sportverein.
Prozentwert **W** = 18; Grundwert **G** = 30; relativer Anteil: $\frac{W}{G} = \frac{18}{30} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{p}{100}$
Prozentzahl **p** = 60; Prozentsatz $p\,\% = \frac{60}{100} = 0{,}6 = 60\,\%$

Beispiel 2: Rechne um.
a) in Prozent $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$; $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\,\%$; $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$
b) in gekürzte Bruchzahlen $30\,\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$; $75\,\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $125\,\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Berechnen den Prozentsatzes

Aus Beispiel 1 kannst du die Verhältnisgleichung $\frac{p}{100} = \frac{W}{G}$ ablesen.
Multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit 100, um Prozentzahlen bzw. Prozentsätze berechnen zu können. $\frac{p}{100} = \frac{W}{G}\ \ |\cdot 100 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{p = 100 \cdot \frac{W}{G}}$

Beispiel 3: Von 678 gültigen Stimmen entfallen 294 Stimmen auf die Partei X.
$p = 100 \cdot \frac{W}{G} = 100 \cdot \frac{294}{678} = 43{,}3628\ \ldots$
Runde das Ergebnis **sinnvoll**: Prozentzahl: $p \approx 43{,}4$;
Prozentsatz: $p\,\% \approx \frac{43{,}4}{100} = 43{,}4\,\%$

Berechnen des Prozentwertes

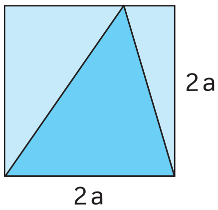
Löst du $\frac{W}{G} = \frac{p}{100}$ nach **W** auf, erhältst du die Formel für den Prozentwert:
$\frac{W}{G} = \frac{p}{100}\ \ |\cdot G \ \Leftrightarrow\ \mathbf{W = \frac{p}{100} \cdot G}$.

Beispiel 4: 16,8 % der Bevölkerung haben Flugangst. Eine Fluglinie beförderte im letzten Jahr 8 425 000 Fluggäste.
Wie viele davon hatten Flugangst?
$W = \frac{p}{100} \cdot G = \frac{16{,}8}{100} \cdot 8\,425\,000 = 1\,415\,400$
$\Rightarrow$ 1 415 400 Personen hatten Flugangst.

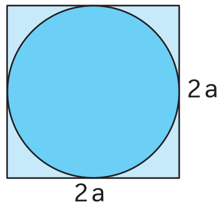
Test 3: Aufgaben für Experten

1 Wie viel Prozent der Grundfläche (hellblau) füllt die einbeschriebene Figur jeweils aus? (Hinweis: Denke an die Formel $A = \pi \cdot r^2$)

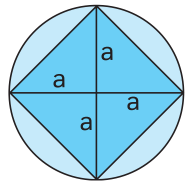
a)



b)



c)



2 Herr Eng muss ein Jahr lang 8000 € aufnehmen und fragt deshalb bei zwei Banken nach den Darlehenskonditionen. Welches der beiden Angebote ist für ihn günstiger? Bestimme auch die effektiven Zinssätze!

A-Bank
Auszahlung: 100 % der Darlehenssumme
Zinssatz: 6,25 %
Tilgung: 102 % der Darlehenssumme

B-Bank
Auszahlung: 98 % der Darlehenssumme
Zinssatz: 6 %
Tilgung: 100 % der Darlehenssumme

3 Ein Händler bietet einen Fernseher für 899 € an, der auch in 12 Monatsraten à 79 € bezahlt werden kann. Sollte Herr Knapp dieses Angebot annehmen oder lieber für diesen Zeitraum einen Verbraucherkredit aufnehmen, der ihn 5 % Zinsen und 1 % Bearbeitungsgebühr kosten würde?

4 Frau Klug möchte 5000 € für 4 Jahre anlegen und vergleicht die beiden Bankangebote.

a) Weches Angebot ist für sie von Vorteil?

b) Gib für das Angebot der B-Bank auch den durchschnittlichen Zinssatz an.

A-Bank
Power-Sparen mit Zinseszinsen und Super-Zinssatz:
1. Jahr: 5,5 %
2. Jahr: 5,5 %
3. Jahr: 5,5 %
4. Jahr: 5,5 %

B-Bank
Dynamik-Sparen mit Zinseszinsen und steigendem Zinssatz:
1. Jahr: 2 %
2. Jahr: 5 %
3. Jahr: 7 %
4. Jahr: 8 %

7 Terme

verstehen

Der Termbegriff

Aus der Geometrie kennst du Formeln wie z. B. $u = a + b + c$ oder $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$. Die in diesen Formeln vorkommenden Ausdrücke wie $a + b + c$ oder $2 \cdot a + 2 \cdot b$, bei denen man anstelle der Buchstaben Zahlen einsetzen kann, nennt man Terme.

Man kann auch sagen, Terme sind **sinnvolle** Rechenausdrücke, die sich aus Zahlen und/oder Variablen (a, b, x, y …) und Rechenoperationen (+; – ; · ; : ; …) zusammensetzen können. Die Variablen sind **Platzhalter** für das Einsetzen von Zahlen.

Es gibt verschiedene Typen von Termen

Es gibt drei verschiedene Typen von Termen:

1. **Terme ohne Variable**,
2. **Terme mit einer Variablen** und
3. **Terme mit mehreren, unterschiedlichen Variablen**.

Beispiel 1: Terme **ohne Variable** kannst du direkt berechnen: $3 \cdot 5 - 7 = 15 - 7 = 8$.

Beispiel 2: Terme **mit einer Variablen** erfordern die Angabe einer **Grundmenge** (das ist die Menge aller Werte, die die Variable annehmen darf).
Die Angabe $2 \cdot x - 3$ und $G_x = \{-2; 0; 3\}$ führt auf die Berechnungen
$2 \cdot (-2) - 3 = -7$; $2 \cdot 0 - 3 = -3$ und $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

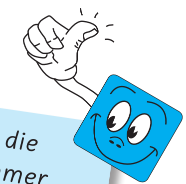
Wenn für einen Term keine Grundmenge angegeben ist, kannst du immer von der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen als Grundmenge ausgehen.

Beispiel 3: Terme **mit mehreren Variablen**, wie z. B. $5 \cdot a^3 - 2t^2$ erfordern eine Angabe für jede darin vorkommende Variable: $G_a = \{0; 1; 2\}$; $G_t = \{-3; -2; -1\}$.
Gilt für alle Variablen die gleiche Grundmenge, genügt es, nur eine anzugeben:
$G_{a,t} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Terme sind meist so aufgebaut, dass sie aus mehreren Rechenschritten bestehen. Die **letzte** durchzuführende Rechenoperation entscheidet, ob es sich um einen Summenterm, Produktterm etc. handelt.

Beispiel 4: Der Term $4 \cdot x + 5$ ist ein Summenterm, es wird nämlich zuerst multipliziert und dann addiert.

Beispiel 5: Der Term $4 \cdot (x + 5)$ ist ein Produktterm, da zuerst addiert (Klammer hat Vorrang) und dann erst multipliziert wird.



Auch bei Termen gelten die „Vorfahrtsregeln“: Klammer zuerst; Potenz vor Punkt; Punkt vor Strich.

üben

Test 4: Aufgaben für Experten

1 Fasse zusammen.

a) $4{,}5\,a^2x - 0{,}5\,b\,y^2 + 0{,}6\,a^2x - 1{,}6\,b\,y^2$

= ______________________

= ______________________

b) $-3{,}2\,x\,y \cdot (-4{,}6\,a\,x + 5{,}4\,b\,y)$

= ______________________

c) $\frac{3}{4}a^2x \cdot (a^2x + x^4) - \frac{5}{6}a\,x^2 \cdot (a^3 - a\,x^3)$

= ______________________

= ______________________

= ______________________

d) $2{,}4\,(2\,p - 3\,q)^2 - 3{,}6\,(2\,p - 3\,q)\,(3\,q + 2\,p)$

= ______________________

= ______________________

= ______________________

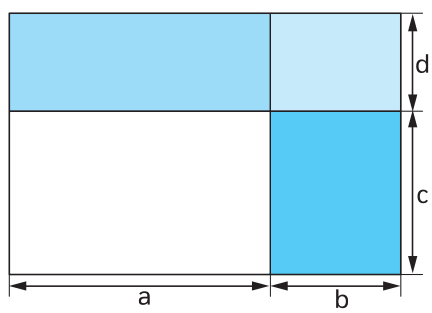
2

a) Trage in jede Teilfläche des Rechtecks denjenigen Term ein, der ihrem Flächeninhalt entspricht.

b) Gib zwei mögliche Terme für den Flächeninhalt des gesamten Rechtecks an.

____

____



c) Ziehe aus Teilaufgabe b) eine Schlussfolgerung und erläutere sie.

____

3

a) Sandra behauptet: „Anstatt eine natürliche Zahl mit ihrem übernächsten Nachfolger zu multiplizieren, kann ich auch das Quadrat ihres direkten Nachfolgers um 1 verkleinern!“ – Stimmt das?

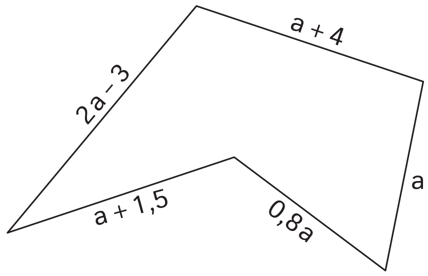
b) Berechne möglichst günstig. (1) $109 \cdot 111$ (2) $140 \cdot 160$

Klassenarbeit Nr. 7 45 min

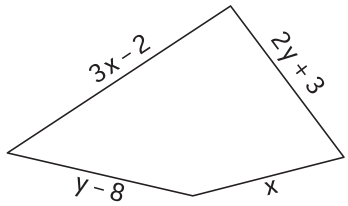
können

1 Du siehst zwei Figuren a) und b). Entscheide, welche der angegebenen Terme für den Umfang zu der jeweiligen Figur passen.
Achtung: Es können auch mehrere Terme richtig sein.

a)



b)



- [ ] $2a + a + a + 0{,}8a + a + 1{,}5 + 3 + 4$
- [ ] $4a + 1{,}8a + 5{,}5 - 3$
- [ ] $5{,}8a + 2{,}5$
- [ ] $5{,}8a + 8{,}5$

- [ ] $4x + 3y - 7$
- [ ] $6xy - 7$
- [ ] $3x + 2y + x + y + 3 - (2 + 8)$
- [ ] $7xy - 13$

/4

2 Bilde den entsprechenden Term.

a) Vergrößere das Vierfache einer Zahl um 5. ______

b) Vermindere das Quadrat einer Zahl um ihre Hälfte. ______

c) Quadriere die Summer aus 7 und dem dritten Teil einer Zahl. ______

d) Teile die Differenz aus dem Quadrat einer Zahl und 5 durch das Sechsfache der Zahl. ______

/4

3 Vereinfache.

a) $a + a + 3 + a + a + 2 =$ ______

b) $10x + 4x + 12 + (-9x) - 11 - (-2x) =$ ______

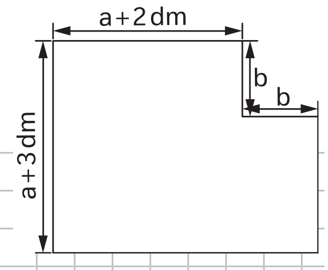
c) $65t - 30t^2 : (-5) =$ ______

d) $(65t - 30t^2) : 5 =$ ______

/4

können

4 Bestimme den Term für Umfang und Flächeninhalt. Berechne anschließend den Umfang für $a = 4\,dm$; $b = 120\,mm$.



/3

5 Vereinfache so weit wie möglich. Achte auf alle Regeln!

a) $3 \cdot (2x + 4) - 3 \cdot x + 5$

= ______

= ______

b) $(2{,}5y - 6{,}2) \cdot 4 - 2 \cdot 3y + 4{,}1$

= ______

= ______

c) $5x \cdot (6x - 7y) + \frac{1}{5}y \cdot (20x + 15y)$

= ______

= ______

d) $(-2x^2y) \cdot (xy^2 - 2y) + 3xy^2 \cdot (-4x^2y + 5x)$

= ______

= ______

/4

6 Berechne das Produkt der Summenterme und fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $(4{,}5x - 5y^2) \cdot (2x^2 + 3{,}5y)$

= ______

= ______

b) $(-2a^2x + 7by^3) \cdot (6ax^3 - 8b^2)$

= ______

= ______

/4

erreichte Punktzahl

/ 23

c) $(3-4b)\cdot 5 - 2\cdot b + 6$
$= 3\cdot 5 - 4b\cdot 5 - 2b + 6$
$= 15 - 20b - 2b + 6$
$= 21 - 22b$

d) $-5\cdot(3x-4) + (-5) + (5-3x-7)\cdot(-4)$
$= -5\cdot 3x - 5\cdot(-4) - 5 + 5\cdot(-4)$
$\quad - 3x\cdot(-4) - 7\cdot(-4)$
$= -15x + 20 - 5 - 20 + 12x + 28$
$= -3x + 23$

2 a) $(x+3)\cdot 3x = 3x^2 + 9x$

b) $(x^2 - 2{,}5x) : 0{,}5x$
$= x^2 : 0{,}5x - 2{,}5x : 0{,}5x$
$= 2x - 5$

3 a) $(a+5)\cdot(3+a)$
$= a\cdot 3 + a\cdot a + 5\cdot 3 + 5\cdot a = 8a + a^2 + 15$

b) $(x-5)\cdot(x+7)$
$= x\cdot x + x\cdot 7 - 5\cdot x - 5\cdot 7 = x^2 + 2x - 35$

c) $(2b+6)\cdot(-3b-2)$
$= 2b\cdot(-3b) + 2b\cdot(-2) + 6\cdot(-3b) + 6\cdot(-2)$
$= -6b^2 - 22b - 12$

d) $(x-y+3)\cdot(-2x+4-y)$
$= x\cdot(-2x) + x\cdot 4 + x\cdot(-y) - y\cdot(-2x) - y\cdot 4$
$\quad - y\cdot(-y) + 3\cdot(-2x) + 3\cdot 4 + 3\cdot(-y)$
$= -2x^2 + 4x - xy + 2xy - 4y + y^2 - 6x$
$\quad + 12 - 3y$
$= -2x^2 - 2x + xy - 7y + 12 + y^2$

Test 4: Aufgaben für Experten — Seite 72

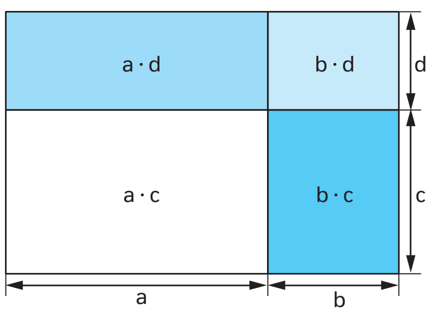
1 a) $4{,}5a^2x - 0{,}5by^2 + 0{,}6a^2x - 1{,}6by^2$
$= (4{,}5 + 0{,}6)a^2x - (0{,}5 + 1{,}6)by^2$
$= 5{,}1a^2x - 2{,}1by^2$

a) $-3{,}2xy\cdot(-4{,}6ax + 5{,}4by)$
$= 14{,}72ax^2y - 17{,}28bxy^2$

c) $\frac{3}{4}a^2x\cdot(a^2x + x^4) - \frac{5}{6}ax^2\cdot(a^3 - ax^3)$
$= \frac{3}{4}a^4x^2 + \frac{3}{4}a^2x^5 - \frac{5}{6}a^4x^2 + \frac{5}{6}a^2x^5$
$= \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)a^4x^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right)a^2x^5$
$= -\frac{1}{12}a^4x^2 + 1\frac{7}{12}a^2x^5$

d) $2{,}4(2p - 3q)^2 - 3{,}6(2p - 3q)(2p + 3q)$
(beachte: $3q + 2p = 2p + 3q$)
$= 2{,}4(4p^2 - 12pq + 9q^2) - 3{,}6(4p^2 - 9q^2)$
$= 9{,}6p^2 - 28{,}8pq + 21{,}6q^2 - 14{,}4p^2$
$\quad + 32{,}4q^2$
$= -4{,}8p^2 - 28{,}8pq + 54q^2$

2 a)



b) Bei der 1. Möglichkeit: $A = (a+b)\cdot(c+d)$ gehst du von *einem* großen Rechteck mit den Seitenlängen $(a+b)$ und $(c+d)$ aus. Bei der 2. Möglichkeit: $A = ac + ad + bc + bd$ setzt du das große Rechteck aus den vier kleineren Rechtecken zusammen.

c) Die Terme aus Teilaufgabe b) beschreiben dieselbe Fläche und sind somit gleich:
$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

3 a) Sandras Behauptung stimmt, denn es gilt:
$(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1$
$\qquad\qquad = n^2 + 2n = n\cdot(n+2)$
Hinweise: Der Term $(n+1)^2 - 1$ besagt, dass der Nachfolger einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$, nämlich $n+1$, quadriert und dann um 1 vermindert wird.
Der Term $n\cdot(n+2)$ steht für das Produkt der natürlichen Zahl n mit ihrem übernächsten Nachfolger $(n+2)$.

b) (1) $109\cdot 111 = 110^2 - 1 = 12100 - 1 = 12099$
(2) $140\cdot 160 = (14\cdot 10)\cdot(16\cdot 10)$
$\qquad = (14\cdot 16)\cdot 10^2$
$\qquad = (15^2 - 1)\cdot 10^2$
$\qquad = (225 - 1)\cdot 100 = 22400$

Klassenarbeit Nr. 7 — Seite 73 – 74

Falls nicht anders angegeben, gibt es für jede Teilaufgabe bzw. jeden Teilschritt einen Punkt.

1 a)
- [ ] $2a + a + a + 0{,}8a + a + 1{,}5 + 3 + 4$
- [x] $4a + 1{,}8a + 5{,}5 - 3$
- [x] $5{,}8a + 2{,}5$
- [ ] $5{,}8a + 8{,}5$

b)
- [x] $4x + 3y - 7$
- [ ] $6xy - 7$
- [x] $3x + 2y + x + y + 3 - (2 + 8)$
- [ ] $7xy - 13$

(je 0,5 P.)

2 a) $4x + 5$ b) $x^2 - \frac{1}{2}x$
c) $\left(7 + \frac{1}{3}x\right)^2$ d) $(x^2 - 5) : 6x$

3 a) $a + a + a + a + 3 + 2 = 4a + 5$
b) $10x + 4x + (-9x) + 2x + 12 + (-11)$
$= 7x + 1$
c) $65t + 6t^2$
d) $65t : 5 - 30t^2 : 5 = 13t - 6t^2$