4.5 Stammfunktionen

Wissen

Sind F und f über demselben Intervall I definierte Funktionen und F ist in diesem Intervall differenzierbar (die 1. Ableitungsfunktion existiert), dann heißt F Stammfunktion von f, wenn für alle $x \in I$ $F'(x) = f(x)$ gilt.

Mit F ist natürlich auch $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion, da c als konstanter Summand beim Ableiten „wegfällt".
Eine Funktion f(x) hat unendlich viele Stammfunktionen. Diese unterscheiden sich aber nur durch eine Konstante. Es gilt:

- Sind G(x) und F(x) zwei Stammfunktionen von f(x), so gilt $G(x) = F(x) + c$.
- Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so ist auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion von f(x).

Wichtige Grundregeln		**Beispiele**	
f(x)	**F(x)**	**f(x)**	**F(x)**
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$3x^5 - \sqrt{3x}$	$\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
e^x	e^x	$-2e^x$	$-2e^x$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$5 \ln x + 3$	$5(x \ln x - x) + 3x$
$\sin x$	$-\cos x$	$6x - 3\sin x$	$3x^2 + 3\cos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\pi - 4\cos x$	$\pi x - 4\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$-7\tan x$	$+7\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\cot x + \sin x$	$\ln\lvert\sin x\rvert - \cos x$

Tab. 4.24: Wichtige Stammfunktionen

Zur Erinnerung:

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Diese „Grundstammfunktionen" gelten nicht, wenn anstatt der Variablen x eine Funktion der Variablen x steht, also bei Verkettungen. Oder wenn Funktionen verknüpft sind.
Um die Stammfunktionen von verketteten oder verknüpften Funktionen bestimmen zu können, sind die bei den Ableitungen geltenden Regeln (Quotienten-, Produkt- und Kettenregel) unbrauchbar. **Die Ableitungsregeln können nicht auf das Bilden von Stammfunktionen übertragen werden.**

Vorsicht:
Bei $f(x) = e^x$
$\Rightarrow F(x) = e^x$,
aber für $f(x) = e^{x^2}$
gilt nicht $F(x) = e^{x^2}$
und $f(x) = x\,e^x$
$\not\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x$!

Es gelten andere Regeln. Die Wichtigste für Sie ist die **lineare Substitution**:
$f(x) = g(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{G(ax+b)}{a}$. Sie gilt nur, wenn die innere Funktion linear ist (Variable hat nur die Exponenten 0 und/oder 1). Steht anstelle der Variablen x in einer Funktion (äußere Funktion) eine lineare Funktion $ax + b$ (innere Funktion), so ist die zugehörige Stammfunktion die mit den „Grundstammfunktionen" gebildete Stammfunktion der äußeren Funktion (innere Funktion wie bei Kettenregel wie eine Variable behandeln) dividiert durch die Ableitung der inneren Funktion.

Umkehrrechenarten sind in der Regel schwieriger durchzuführen als die ursprüngliche Rechenart. Dies gilt auch beim Integrieren als Umkehrrechenart des Differenzierens.