Klaus Schilling, Marion Patyna

Berufsbezogene Mathematik für die Fachoberschule

Nichttechnische Fachrichtungen
Klasse 12

3. Auflage

Bestellnummer 06082

Bildungsverlag EINS

Die in diesem Produkt gemachten Angaben zu Unternehmen (Namen, Internet- und E-Mail-Adressen, Handelsregistereintragungen, Bankverbindungen, Steuer-, Telefon- und Faxnummern und alle weiteren Angaben) sind i. d. R. fiktiv, d. h., sie stehen in keinem Zusammenhang mit einem real existierenden Unternehmen in der dargestellten oder einer ähnlichen Form. Dies gilt auch für alle Kunden, Lieferanten und sonstigen Geschäftspartner der Unternehmen wie z. B. Kreditinstitute, Versicherungsunternehmen und andere Dienstleistungsunternehmen. Ausschließlich zum Zwecke der Authentizität werden die Namen real existierender Unternehmen und z. B. im Fall von Kreditinstituten auch deren IBANs und BICs verwendet.

Die in diesem Werk aufgeführten Internetadressen sind auf dem Stand zum Zeitpunkt der Drucklegung. Die ständige Aktualität der Adressen kann vonseiten des Verlages nicht gewährleistet werden. Darüber hinaus übernimmt der Verlag keine Verantwortung für die Inhalte dieser Seiten.

Ein **Lösungsbuch** mit ausführlichen Lösungshinweisen ist **auch für Schüler** erhältlich unter der **Bestellnummer 06083**.

service@bv-1.de
www.bildungsverlag1.de

Bildungsverlag EINS GmbH
Ettore-Bugatti-Straße 6—14, 51149 Köln

ISBN 978-3-427-**06082**-6

Vorwort

Das vorliegende Schulbuch entspricht den Vereinbarungen der KMK über den Erwerb der Fachhochschulreife (2001) und den Vereinbarungen über die Fachoberschule (2004), die in den Rahmenrichtlinien der Länder umgesetzt worden sind.

Sowohl in den KMK-Vereinbarungen als auch in den Rahmenrichtlinien wird als Grundsatz vorgegeben: „Die Schülerinnen und Schüler sollen ausgehend von **fachrichtungsbezogenen Problemstellungen** grundlegende Fach- und Methodenkompetenzen in der Mathematik … erwerben.“

Um diesem fachrichtungsbezogenen Anspruch hinreichend gerecht zu werden, beschränkt sich der vorliegende Band auf die nichttechnischen Fachrichtungen Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales, Gestaltung, Ernährung und Hauswirtschaft sowie Agrarwirtschaft.

Verbindliche Lerngebiete für alle Fachrichtungen der Klasse 12 der Fachoberschule sind:

- **Ganzrationale Funktionen**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**

Um den spezifischen Anforderungen der einzelnen nichttechnischen Fachrichtungen weitergehend zu entsprechen, bietet das vorliegende Schulbuch folgende **optionale Lerngebiete** an:

- **Exponentialfunktionen**
- **Gebrochenrationale Funktionen**
- **Lineare Algebra**
- **Stochastik**

Die **Aufgaben mit Lösungen** sind mit dem nebenstehenden Symbol in einem blauen Streifen markiert.

Die zahlreichen **Übungsaufgaben** zur Verfestigung des Stoffes werden durch das nebenstehende Symbol in einem grünen Streifen gekennzeichnet.

Die Darstellung der mathematischen Inhalte in diesem Schulbuch folgt dem Primat einer für Schülerinnen und Schüler möglichst **anschaulichen und verständlichen Form**. Wir wünschen allen Schülerinnen und Schülern, Lehrerinnen und Lehrern, die mit diesem Buch arbeiten, viel Erfolg und Freude an der Mathematik.

Über Rückmeldungen, Verbesserungsvorschläge und die Mitteilung entdeckter Fehler über die E-Mail-Adresse service@bv-1.de würden wir uns freuen.

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen und Symbole

Zeichen, Symbol	Sprechweise/Bedeutung	Beispiel
$=$	gleich	$4 = 4$
$\neq$	ungleich	$3 \neq 4$
$\approx$	ist ungefähr gleich	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$
$<$	kleiner als	$3 < 4$
$>$	größer als	$5 > 4$
$\leq$	kleiner gleich	$x \leq 3$
$\geq$	größer gleich	$x \geq 4$
$\lvert\ \rvert$	Betrag von	$\lvert -3 \rvert = 3$
∞	unendlich	
$\Rightarrow$	daraus folgt	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \Rightarrow \{1\} \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow$	gilt genau dann, wenn; ist äquivalent mit	$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
$\wedge$	und	
$\vee$	oder	
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen **einschließlich** 0	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen **einschließlich** 0	$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen **einschließlich** 0	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z; b \in Z^*\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen **einschließlich** 0	
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$	Zahlen der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **ohne** 0	$\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2; -1; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	positive Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **einschließlich** 0	$\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}_+^*$	positive Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **ohne** 0	$\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-$	negative Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **einschließlich** 0	$\mathbb{Z}_- = \{\dots; -3; -2; -1; 0\}$
$\mathbb{Z}_-^*, \mathbb{Q}_-^*, \mathbb{R}_-^*$	negative Zahlen der Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **ohne** 0	$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots; -3; -2; -1\}$
$\{1; 2; 3\}$	Menge mit den Elementen 1, 2, 3	$A = \{1; 2; 3\}$
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller x für die gilt …	$D = \{x \mid 0 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$
$\{(x; y) \mid \dots\}$	Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$ für die gilt …	$\{(x; y) \mid y = 3x\}$
$\emptyset = \{\}$	leere Menge	$\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{N}^* = \emptyset = \{\}$
$\in$	Element von	$\{1\} \in \mathbb{N}$
$\notin$	nicht Element von	$\{-1\} \notin \mathbb{N}$

Zeichen, Symbol	Sprechweise/Bedeutung	Beispiel
$\cup$	vereinigt mit	$\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$
$\cap$	geschnitten mit	$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$
$\subset$	ist echte Teilmenge von	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
$\setminus$	ohne	$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$
$[a\,;\,b]$	geschlossenes Intervall (von einschließlich a bis einschließlich b)	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a\,;\,b)$	offenes Intervall (von ausschließlich a bis ausschließlich b)	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a\,;\,b)$	halb offenes Intervall (von einschließlich a bis ausschließlich b)	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$(a\,;\,b]$	halb offenes Intervall (von ausschließlich a bis einschließlich b)	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$P(x/y)$	Punkt P mit den Koordinaten (x/y)	$P(1/3)$
$f\colon f(x) = \ldots$	eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \ldots$	$f\colon f(x) = 3x$
$\langle a_n \rangle$	Folge a_n	$\langle a_n \rangle$: 1; 4; 9; 16; …
f	reelle Funktion	$f\colon f(x) = x^2$
$\mapsto$	wird zugeordnet	$x \mapsto f(x)$
f^{-1}	Umkehrfunktion	$f\colon f(x) = 2x \Rightarrow f^{-1}\colon f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
f^*	Asymptotenfunktion	für $f\colon f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f^*\colon f^*(x) = 0$
$g \circ h$	g verkettet mit h (verkettete Funktion)	$f = g \circ h\colon f(x) = g[h(x)]$
$D(f)$	Definitionsbereich, Definitionsmenge einer Funktion f	$D(f) = \mathbb{R}_+^*$
$W(f)$	Wertebereich, Wertemenge einer Funktion f	$W(f) = [1;\infty)$
$D_{ök}(f)$	ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich der Funktion f	$D_{ök}(K) = [0;\, x_{Kap}]$
$W_{ök}(f)$	ökonomisch sinnvoller Wertebereich der Funktion f	$W_{ök}(K) = [K(0);\, K(x_{Kap})]$
L	Lösungsmenge	$L = \{3\}$
$\rightarrow$	gegen; nähert sich	$x \rightarrow \infty$
lim	Grenzwert (Limes)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$
Δy	Delta y	$\Delta y = y_2 - y_1$
$f'(x)$	f Strich von x	(1.) Ableitung von $f(x)$
$f''(x)$	f zwei Strich von x	2. Ableitung von $f(x)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'$ ist die Ableitung von f mit der Variablen x
Σ	Summe	
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	Summe aller x_i von $i = 1$ bis $i = n$	$\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
$\int$	unbestimmtes Integral	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral f von x $\mathrm{d}x$ von a bis b	$\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Zeichen, Symbol	Sprechweise/Bedeutung	Beispiel
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	Matrix A mit den Elementen a_{11}, a_{12}, a_{21} und $a_{22} \in$ r	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{5} & 0{,}7 \end{pmatrix}$
A^T	Transponierte Matrix A, Zeilen und Spalten der Matrix werden vertauscht.	$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \\ -3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$	Spaltenvektor $\vec{b}$ mit den Elementen b_1 und $b_2 \in$ r	$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\vec{b}^T = (b_1 \;\; b_2)$	Zeilenvektor $\vec{b}$ mit den Elementen b_1, b_2, $\in$ r	$\vec{b}^T = (-2 \quad 4)$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$	n Fakultät	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	Binominalkoeffizient: n über k = n-Fakultät geteilt durch das Produkt aus $(n-k)$-Fakultät und k-Fakultät	$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$
$\overline{x}$	Arithmetisches Mittel, Mittelwert, Durchschnittswert einer Zahlenreihe	
s^2	Varianz	
s	Standardabweichung	

Aufbau des Zahlensystems

Natürliche Zahlen ohne die Zahl 0
$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$

0

Natürliche Zahlen einschließlich der Zahl 0
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Negative ganze Zahlen
$\mathbb{Z}^*_- = \{\ldots; -3; -2; -1\}$

Ganze Zahlen
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^*_- = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Echte Bruchzahlen z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{3}$

Rationale Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$

Irrationale Zahlen **I**: alle unendlichen nicht periodischen Zahlen, z. B. $\sqrt{2}$, e oder π

Reelle Zahlen
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$: alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Potenz-, Wurzel- und Logarithmengesetze

Potenzgesetze

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

n ← Exponent (Hochzahl)

a ← Basis

gleiche Basis:	• $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ • $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0$
gleiche Hochzahlen:	• $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ • $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad a \neq 0,\ b \neq 0$
Potenzen potenzieren:	• $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Folgerungen:	• $a^0 = 1$ • $a^{-1} = \frac{1}{a}; \qquad a \neq 0$ • $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a \neq 0$

Wurzelgesetze

• $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	• $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$ • $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$
• $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ • $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ • $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ • $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ • $\sqrt[3]{a^3} = a$	

Logarithmengesetze

Logarithmus = **Exponent** (Hochzahl)

Logarithmieren heißt: den Exponenten (die Hochzahl) berechnen.

$$\text{Basis} \rightarrow \overset{\substack{\textbf{Hochzahl}\\ \downarrow}}{b}{}^{x} = \overset{\substack{\textbf{Potenzwert}\\ \swarrow}}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{Hochzahl}}}{x} = \log_{\underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{Basis}}}{b}} y \leftarrow \textbf{Potenzwert}$$

Die Zahl x heißt Logarithmus von y zur Basis b.

Berechnung mit dem Taschenrechner:

- $x = \log_b y = \dfrac{\ln y}{\ln b}$

oder

- $x = \log_b y = \dfrac{\lg y}{\lg b}$

Sonderfälle:

$\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0$

Logarithmus zur Basis e (natürlicher Logarithmus):

- $\log_e y = \ln y$
- $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
- $e^{\ln x} = x$

Für Logarithmen mit einer beliebigen Basis gilt:

- $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$
- $\log \dfrac{u}{v} = \log u - \log v$
- $\log a^u = u \cdot \log a$
- $\log \sqrt[v]{a^u} = \log a^{\frac{u}{v}} = \dfrac{u}{v} \log a$
- $a^x = e^{x \ln a}$

3 Durch welche Veränderungen im Funktionsterm kann man den Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^n$

a) in $f(x)$-Richtung

b) in x-Richtung

verschieben?

Hinweis: Übertragen Sie Ihre Kenntnisse über die Verschiebung der Graphen von quadratischen Funktionen (Stichwort: Scheitelpunktform) auf die Potenzfunktionen.

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen

- $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)^3 + 1$
- $f(x) = 2(x - 2)^3 - 1$.

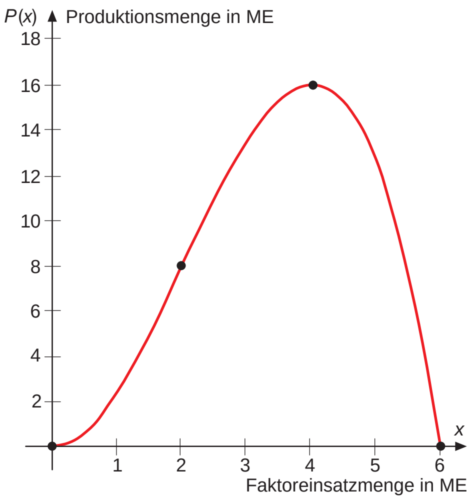
1.5 Ganzrationale Funktionen mit $n \leq 4$

1.5.1 Ganzrationale Funktionen als Summen von Potenzfunktionen (Polynomform)

In der volkswirtschaftlichen Produktionstheorie versucht man u.a. zu erklären, wie die Produktionsmenge (auch: Ertrag) vom Einsatz der Produktionsfaktoren Arbeit, Boden und Kapital abhängt.

Die sog. **Produktionsfunktion** ist ein insofern vereinfachtes Modell, dass deren Graph die funktionale Abhängigkeit der Produktionsmenge von nur *einem* Produktionsfaktor veranschaulicht.

Der Franzose **Anne Robert Jacques Turgot** (1727–1781) hat als Erster den Zusammenhang in seinem „Gesetz vom abnehmenden Bodenertrag“ (= **Ertragsgesetz**) formuliert.

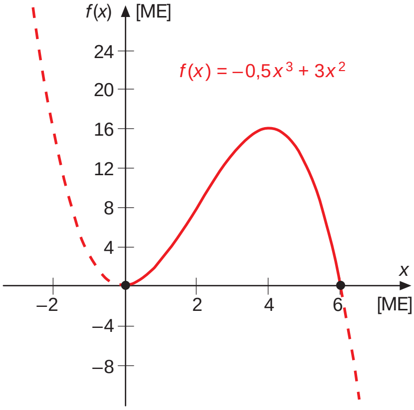


Wird der Einsatz des Produktionsfaktors Kapital (z.B. Dünger in der Landwirtschaft) gesteigert, und werden dabei die Produktionsfaktoren Arbeit und Boden konstant gehalten, dann steigen die Erträge (z.B. Weizenproduktion) zunächst bis zu einer bestimmten Faktoreinsatzmenge (hier: $x = 2$) progressiv (überproportional) und dann nur noch degressiv (unterproportional). Ab einer bestimmten Einsatzmenge des Düngers (hier: $x = 4$) beginnen die Erträge mit jedem weiteren Einsatz des Produktionsfaktors progressiv zu sinken und werden schließlich 0 (Überdüngung).

Der dargestellte Graph passt nicht zu den bisher bekannten Funktionen.

Man kann eine Funktion mit einem solchen Graphen aber erzeugen, indem man verschiedene Potenzfunktionen addiert.

Hier wurden die Terme der kubischen Potenzfunktion mit $f_1(x) = -0{,}5x^3$ und der quadratischen Funktion mit $f_2(x) = 3x^2$ addiert.
Man erhält dann eine neue (Summen-) Funktion:
$f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2$; $D_{max}(f) = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion über seinem maximal möglichen Definitionsbereich ist in dem nebenstehenden Schaubild zu erkennen.



Die oben abgebildete Produktionsfunktion ist ein Teil dieses Graphen, dadurch entstanden, dass der maximal mögliche Definitionsbereich auf den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{ök}(f) = [0; 6]$ eingeschränkt worden ist.

Eine **ganzrationale Funktion** entsteht durch **Addition mehrerer Potenzfunktionen.**[1)]

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
ist die **allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion.**[2)]

Der Exponent der höchsten Potenz heißt **Grad der ganzrationalen Funktion**.

Zum Beispiel ist $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 3$ die Funktionsgleichung einer **ganzrationalen Funktion 4. Grades**.

Die einzelnen Glieder werden wie folgt bezeichnet:

$$f(x) = \underbrace{2x^4}_{\text{Glied 4. Grades}} \underbrace{-\,3x^2}_{\text{Quadratglied}} \underbrace{-\,x}_{\text{Linearglied}} \underbrace{+\,3}_{\text{Absolutglied}}$$

Übungsaufgabe

1 Welche ganzrationale Funktion entsteht durch Addition der angegebenen Einzelfunktionen?
Welchen Grad hat die entstandene ganzrationale Funktion?
Benennen Sie die Glieder der entstandenen ganzrationalen Funktion.

a) $f_1(x) = 3x + 2$
$f_2(x) = 4x^2 - x - 1$
$f_3(x) = -2x^3$

b) $f_1(x) = 3x^3 - 2$
$f_2(x) = -3$
$f_3(x) = -4x^2 + x$

c) $f_1(x) = -x^4 + 2$
$f_2(x) = -x - 1$
$f_3(x) = 1$

d) $f_1(x) = -3x^4$
$f_2(x) = x^3 + x - 2$
$f_3(x) = -x - 2$

[1)] Damit ein Absolutglied entsteht, wird in der Potenzfunktion $n = 0$.
[2)] Hier handelt es sich um die sog. **Polynomdarstellung** einer ganzrationalen Funktion.
$a_n, a_{n-1}, \ldots$ werden **Koeffizienten** (= **Beizahlen** oder Faktoren) der Variablen x genannt.

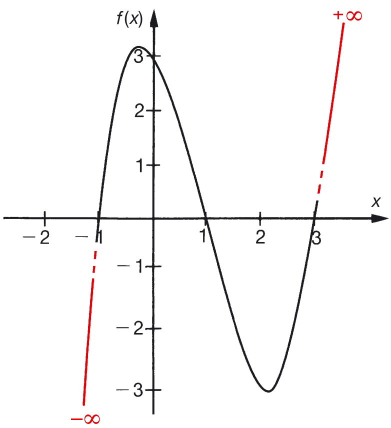
1.5.2 Verlauf des Graphen für $x \to \pm\infty$

Im Folgenden wollen wir versuchen, den Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen. Hierbei interessiert uns zunächst nicht der Verlauf in der Nähe des Koordinatenursprungs, sondern vielmehr der Verlauf des Graphen für sehr große bzw. sehr kleine x-Werte ($x \to \pm\infty$).

Würde man z. B. für die Funktion mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ eine Wertetabelle aufstellen, so würde man feststellen, dass für sehr große bzw. sehr kleine x-Werte ($x \to \pm\infty$) das Glied mit dem größten Exponenten (hier: x^3) den weitaus überragenden Anteil am Funktionswert ausmacht. Alle anderen Glieder werden bedeutungslos, wenn man für x sehr große oder sehr kleine Zahlen einsetzt.

Für sehr große bzw. sehr kleine x-Werte ist **das Glied** des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion **mit dem größten Exponenten ausschlaggebend für den Verlauf des Funktionsgraphen im Unendlichen.**

Der Graph der Funktion mit
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
verläuft daher für $x \to \pm\infty$ wie der Graph der Potenzfunktion mit $f(x) = x^3$ in x-Richtung betrachtet von $-\infty$ nach $+\infty$.



Situation 1

Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen der ganzrationalen Funktion für $x \to \pm\infty$.

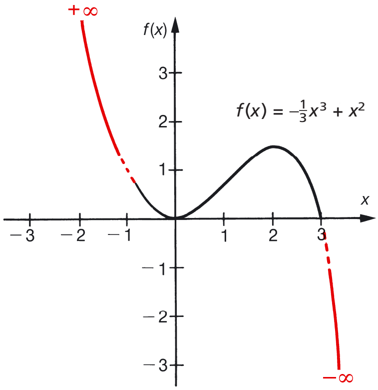
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

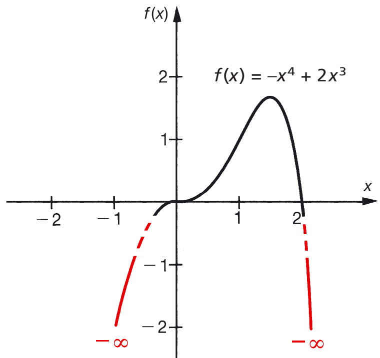
b) $f(x) = -x^4 + 2x^3$

Lösung

a) Das Glied des Funktionsterms mit dem größten Exponenten ist $-\frac{1}{3}x^3$. Für $x \to \pm\infty$ verhalten sich die Funktionswerte der ganzrationalen Funktion wie die der Potenzfunktion mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$. Weil n = ungerade und $a < 0$ ist, verläuft der Graph in x-Richtung betrachtet von $+\infty$ nach $-\infty$ (siehe Abb. oben links auf der Folgeseite).

b) Ausschlaggebend für den Verlauf des Graphen der ganzrationalen Funktion ist das Glied $-x^4$. Wegen n = gerade und $a < 0$ verläuft der Graph in x-Richtung betrachtet aus dem negativ Unendlichen wieder ins negativ Unendliche (siehe Abb. oben rechts auf der Folgeseite).





Übungsaufgaben

1 Geben Sie den Verlauf des Graphen für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

a) $f(x) = -x^4 + x^2 - 2$ b) $f(x) = 3x^3 + x$

c) $f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^4 - 6$ d) $f(x) = 2x^3 - 0{,}25x^4 - x$

e) $f(x) = -x^2 - 2x^5 + x^3 - 1$ f) $f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}5x^3 + x$

2 Geben Sie den Verlauf des Graphen für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

a) $f(x) = 3x^2 - 0{,}5x^3 + x$ b) $f(x) = -x + 2x^4 - 3x^2$

c) $f(x) = -3x^3 + 2 - 2x + 4x^3$ d) $f(x) = -x^2 + 3x + 3x^2$

e) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - x^4$ f) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x^3 + 1$

1.5.3 Linearfaktordarstellung

Wenn die Nullstellen des Graphen einer ganzrationalen Funktion bekannt sind, lässt sich der Verlauf des Funktionsgraphen auch in der Nähe des Koordinatenursprungs konkretisieren.

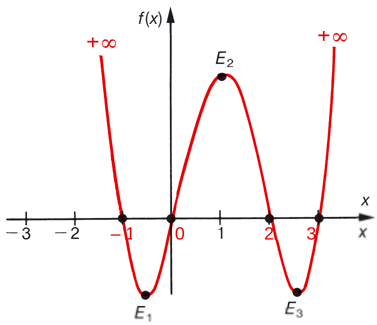
Situation 2

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, nicht gedehnt oder gestaucht, ist nach oben geöffnet und schneidet die Abszissenachse bei $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ und $x = 3$. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen und stellen Sie seine Funktionsgleichung auf.

Lösung

Da die Funktion 4. Grades und nach oben geöffnet ist (d. h. $a_n > 0$), muss der Funktionsgraph bei Einhaltung der vorgegebenen Nullstellen aus dem positiv Unendlichen kommen und ins positiv Unendliche verlaufen (siehe Abb.).

(Die genaue Lage der sog. Extrempunkte (E_1, E_2 und E_3) kann vorläufig noch nicht bestimmt werden. Hierzu ist die später zu behandelnde „Differenzialrechnung“ notwendig.)



Die **Funktionsgleichung** des Graphen ergibt sich aus folgender Überlegung:

Zur Berechnung der Nullstellen einer Funktion wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt ($f(x) = 0$). Die Gleichung $0 = \ldots$ muss dann die Lösungen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 3$ haben. Die entsprechende Gleichung lautet:

$$0 = (x + 1) \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Wenn man nämlich für x die Zahlen -1, 0, 2 oder 3 einsetzt, ergibt die Gleichung eine wahre Aussage. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet demnach:

$\underline{\underline{f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)}}$: **Linearfaktordarstellung**[1)]

oder ausmultipliziert:

$\underline{\underline{f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}}$: **Polynomdarstellung**

Wäre in der Aufgabenstellung gefordert gewesen, dass der Graph nach unten geöffnet ist, so hätte der ganze Funktionsterm mit einer negativen Zahl multipliziert werden müssen. Dann wäre nämlich auch der Koeffizient bei der Potenz mit dem größten Exponenten a_n negativ geworden:

$f(x) = -1 \cdot (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x$

Aus der Linearfaktordarstellung ergibt sich:

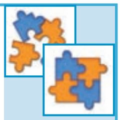
Der Graph einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades hat höchstens ***n* Nullstellen**.

Der Graph einer **ganzrationalen Funktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle**, da er ja vom negativ Unendlichen ins positiv Unendliche verläuft (oder umgekehrt).

Der Graph einer ganzrationalen Funktion geraden Grades kann auch keine Nullstelle haben, wenn er vollständig oberhalb oder vollständig unterhalb der Abszissenachse verläuft.

Die Aussagen über die Anzahl der Nullstellen treffen im Übrigen auch für lineare, quadratische und Potenzfunktionen zu, da diese ja im weiteren Sinne auch ganzrationale Funktionen sind.

Situation 3



Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades mit $a_n = 1$ und mit einer doppelten Nullstelle bei $x = -1$ und einfachen Nullstellen bei $x = 2$ und $x = 3$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung

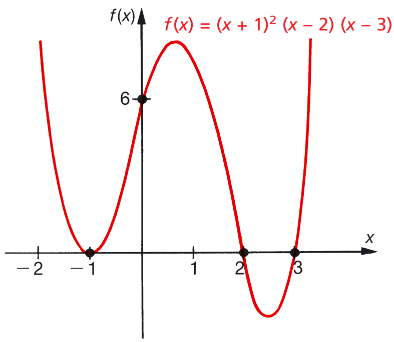
Linearfaktordarstellung:

$f(x) = 1 \cdot (x + 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

$\underline{\underline{f(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x - 3)}}$

Durch Ausmultiplizieren erhält man die Polynomdarstellung:

$\underline{\underline{f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}}$



[1)] **Linearfaktordarstellung** deswegen, weil der Funktionsterm nicht aus Summanden, sondern aus linearen (größter Exponent: 1) Faktoren besteht.

Übungsaufgaben

1 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit den angegebenen Nullstellen und bestimmen Sie die Funktionsgleichung in Linearfaktor- und Polynomdarstellung. Achten Sie auch auf den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

a) $x_{1/2} = 0,\ x_3 = 2;\ n = 3,\ a_n > 0$

b) $x_1 = -2,\ x_{2/3} = 0,\ x_4 = 1;\ n = 4,\ a_n < 0$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{3/4} = 3;\ n = 4,\ a_n < 0$

d) $x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2;\ n = 3,\ a_n > 0$

e) $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3;\ n = 4,\ a_n > 0$

f) $x_1 = -1,\ x_{2/3} = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2;\ n = 5,\ a_n = 2$

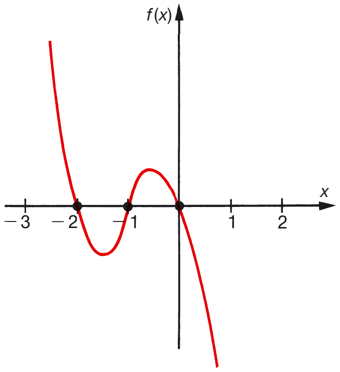
g) $x_1 = -3,\ x_{2/3} = 1,\ x_{4/5} = 3;\ n = 5,\ a_n = -3$

h) $x_{1/2} = -2,\ x_{3/4} = 0,\ x_{5/6} = 2;\ n = 6,\ a_n = -1$

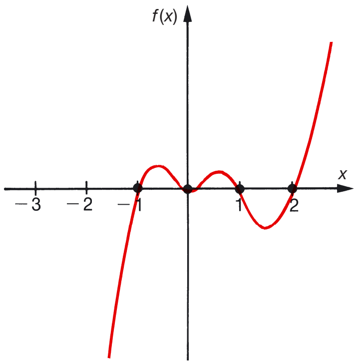
2 Belegen Sie, dass der in diesem Abschnitt aufgeführte Satz über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen auch auf lineare und quadratische Funktionen zutrifft.

3 Wie lautet die Funktionsgleichung des Graphen in Linearfaktor- und Polynomdarstellung ($|a_n| = 1$)?

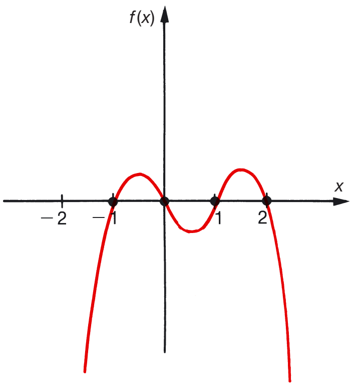
a)



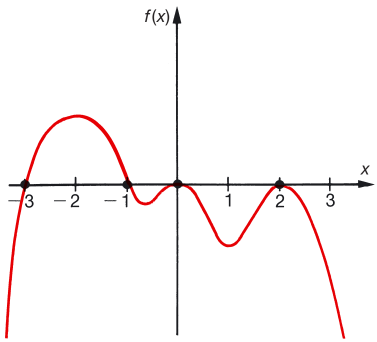
b)



c)



d)



1.5.4 Nullstellenberechnung

In Abschnitt 1.5.3 konnte der Graph einer ganzrationalen Funktion (abgesehen von den Extrempunkten) dadurch konstruiert werden, dass die Schnittpunkte mit der Abszissenachse vorgegeben waren und das Verhalten für $x \to \pm\infty$ aus der Funktionsgleichung bestimmt werden konnte.

Leider sind ganzrationale Funktionen i. d. R. in der Polynomdarstellung vorgegeben. Die Nullstellen kann man nicht direkt ablesen, sie müssen vielmehr berechnet werden.

Zur **Nullstellenberechnung ganzrationaler Funktionen** sollen hier drei gängige Verfahren vorgestellt werden:

1. Ausklammern

Situation 4

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Skizzieren Sie den Graphen (ohne Wertetafel) und geben Sie die Linearfaktordarstellung der Funktion an.

Lösung

Zur Nullstellenberechnung wird der Funktionsterm immer gleich 0 gesetzt: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

$$0 = x^3 + x^2 - 2x$$

Die Zahlen, die diese Gleichung erfüllen, führen gleichzeitig dazu, dass der Funktionswert 0 ist und sind somit Nullstellen der Funktion.
Durch **Ausklammern** von x ergibt sich 0:

$$0 = x \cdot (x^2 + x - 2)$$

Der Term $x \cdot (\ldots)$ wird 0, wenn

- der 1. Faktor $x = 0$ wird. Das ist der Fall, wenn man für x die Zahl 0 einsetzt. Daraus folgt, dass $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ die erste Nullstelle ist.
- die Klammer den Wert 0 annimmt. Um diese Zahlen zu errechnen, wird die Klammer gleich 0 gesetzt:

$$0 = x^2 + x - 2$$

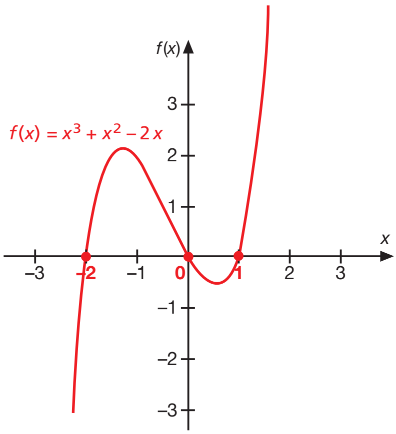
Mithilfe der p-q-Formel lässt sich dann leicht die 2. und 3. Nullstelle berechnen:

$$x_{2/3} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

$\underline{\underline{x_2 = 1}}$

$\underline{\underline{x_3 = -2}}$



Die **Linearfaktordarstellung** der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ ergibt sich aus den berechneten Nullstellen:

$$\underline{\underline{f(x) = x(x - 1)(x + 2)}}$$

Das **Ausklammerungsverfahren** kann zur Nullstellenberechnung stets angewendet werden, wenn kein Absolutglied im Funktionsterm enthalten ist.

Der Nullstellenberechnung eines faktorisierten Terms liegt folgender Gedanke zugrunde:

Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt wird immer dann 0, wenn (zumindest) einer der Faktoren 0 ist.

2. Substitutionsverfahren (Ersetzungsverfahren)

Situation 5

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie die Linearfaktordarstellung der Funktion an.

Lösung

$f(x) = 0$

Es sind dann die Zahlen zu bestimmen, die in der Gleichung

$$0 = x^4 - 10x^2 + 9$$

zu einer wahren Aussage führen.

Diese Gleichung 4. Grades lässt sich durch Substitution (Ersetzen) von x^2 durch u in eine quadratische Gleichung umformen:

$x^2 = u$

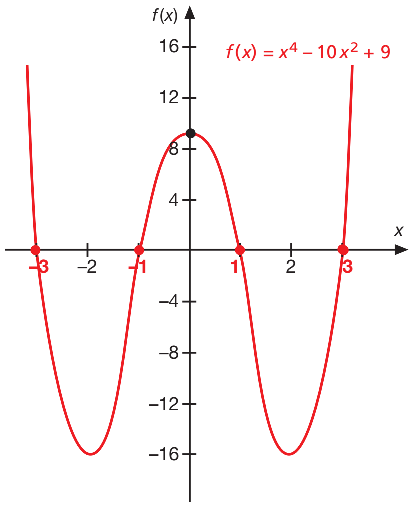
$\Rightarrow 0 = u^2 - 10u + 9,$

die dann mithilfe der p-q-Formel leicht lösbar ist:

$$u_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$$
$$= 5 \pm \sqrt{16}$$
$$= 5 \pm 4$$

$\underline{u_1 = 9}$

$\underline{u_2 = 1}$



Da aber nicht u, sondern x berechnet werden soll, und $x^2 = u$ ist, folgt daraus

$x_{1/2} = \pm \sqrt{u}$.

Also ist:

$\underline{x_{1/2} = \pm \sqrt{9} = \pm 3}$

$\underline{x_{3/4} = \pm \sqrt{1} = \pm 1}$

Die Linearfaktordarstellung der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)}}$$

Das **Substitutionsverfahren** lässt sich immer dann anwenden, wenn eine Gleichung höheren Grades durch die Substitution einer Potenz auf eine quadratische Gleichung reduzierbar ist.

3. Polynomdivision (lineare Abspaltung)

Situation 6

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie die Linearfaktordarstellung der Funktion an.

Lösung

Wenn es gelingt, die Polynomdarstellung der Funktion umzuformen in die Linearfaktordarstellung, dann können die Nullstellen der Funktion direkt abgelesen werden.

Um diese Umstellung verständlich zu machen, wird **erst einmal in umgekehrter Reihenfolge** vorgegangen:

Die zu berechnenden Nullstellen der o. a. Funktion sind $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$.

Die Linearfaktordarstellung lautet demnach:

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 1)$$

Schrittweises Ausmultiplizieren führt zu:

$$f(x) = (x^2 - x - 6)(x - 1)$$

und dann

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Wenn also der Funktionsterm durch Multiplikation von $(x^2 - x - 6)$ mit $(x - 1)$ entstanden ist, dann muss umgekehrt die Division von $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$ durch $(x - 1)$ den Ausdruck $(x^2 - x - 6)$ ergeben.

Den Linearfaktor, durch den dividiert werden soll (hier: $(x - 1)$), erhält man, indem man die erste Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **durch Probieren mit ganzzahligen Teilern des Absolutgliedes** (hier: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6) herausfindet. Es wird also für x z. B. $+1$ eingesetzt und festgestellt, dass der entsprechende Funktionswert $f(1)$ gleich 0 ist. Somit ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle der Funktion, und ein Linearfaktor lautet demnach: $(x - 1)$.

Jetzt kann also das Polynom $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$ durch den Linearfaktor $(x - 1)$ dividiert werden (Polynomdivision oder lineare Abspaltung):

$$\underset{(=\textbf{Dividend})}{(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)} \quad : \quad \underset{(=\textbf{Divisor})}{(x - 1)} \quad \underset{(=\textbf{Quotient})}{= \ldots}$$

Ähnlich wie bei der schriftlichen Division von Zahlen wird dabei schrittweise vorgegangen: 1. Glied des Dividenden geteilt durch 1. Glied des Divisors ergibt das 1. Glied des Quotienten:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2$$

Dann wird rückwärts das ermittelte 1. Glied des Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliziert, unter den Dividenden geschrieben und subtrahiert:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad\; - x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

Für die noch verbleibenden Glieder des Dividenden wird jetzt die Division wieder wie oben beschrieben durchgeführt: 1. Glied des „vereinfachten“ Dividenden geteilt durch 1. Glied des Divisors, anschließend Ausmultiplikation rückwärts des ermittelten 2. Gliedes des Quotienten mit dem ganzen Divisor und Subtraktion vom „vereinfachten“ Dividenden. Dann wieder wie oben:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad - x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(- x^2 + x)} \\ \qquad\quad - 6x + 6 \\ \qquad \underline{-(- 6x + 6)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Die Polynomdivision hat also genau zu dem erwarteten Ergebnis geführt.
Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ lässt sich also auch schreiben als:

$$f(x) = (x^2 - x - 6)(x - 1)$$

Der Funktionsterm wird 0, wenn einer der beiden Faktoren (eine der beiden Klammern) 0 wird. Dies ist für die zweite Klammer der Fall bei $x = 1$ (diese Feststellung wurde bereits oben getroffen). Es muss also noch errechnet werden, für welche Zahlen die erste Klammer 0 wird:

$0 = x^2 - x - 6$

Mithilfe der p-q-Formel kann diese Gleichung gelöst werden:

$$x_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\underline{x_2 = 3}$

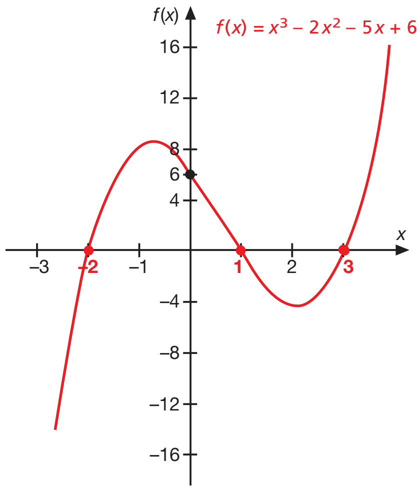
$\underline{x_3 = -2}$

Die Nullstellen der Funktion sind demnach:

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$, $\underline{\underline{x_2 = 3}}$, $\underline{\underline{x_3 = -2}}$

Die Linearfaktordarstellung lautet:

$\underline{\underline{f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2).}}$



Die Polynomdivision in **Situation 6** hat dazu geführt, dass der Funktionsterm in Form einer Summe durch einen linearen und einen quadratischen Faktor $(x^2 - x - 6)$ ausgedrückt werden konnte. Aus den daraus resultierenden Gleichungen konnten dann die Nullstellen berechnet werden.

Wenn eine vorgegebene Funktion 4. oder höheren Grades ist, so muss die Polynomdivision so oft durchgeführt werden, bis ein Faktor maximal 2. Grades vorhanden ist.

Situation 7

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$.

Lösung

Probieren mit ganzzahligen Teilern des Absolutgliedes führt zur ersten Nullstelle: $\underline{\underline{x_1 = 1}}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
-\underline{(x^4 - x^3)} \\
+ 6x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \\
-\underline{(+ 6x^3 - 6x^2)} \\
11x^2 - 5x - 6 \\
-\underline{(11x^2 - 11x)} \\
6x - 6 \\
-\underline{(6x - 6)} \\
0
\end{array}$$

Die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion lässt sich also auch ausdrücken durch:

$$f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)(x - 1)$$

Da für die erste Klammer immer noch nicht die Nullstellen zu bestimmen sind, muss erneut durch Polynomdivision ein Linearfaktor abgespalten werden (was den Grad der ersten Klammer wiederum um 1 verringert).

Eine neue Nullstelle wird durch Probieren im Term $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ herausgefunden:

$$\underline{\underline{x_2 = -1}}$$

Erneute Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x + 1) = x^2 + 5x + 6 \\
-\underline{(x^3 + x^2)} \\
5x^2 + 11x + 6 \\
-\underline{(5x^2 + 5x)} \\
6x + 6 \\
-\underline{(6x + 6)} \\
0
\end{array}$$

Die Funktion lässt sich also schreiben:

$f(x) = (x^2 + 5x + 6)(x + 1)(x - 1)$

Neben den bereits durch Probieren herausgefundenen Nullstellen können die restlichen Nullstellen mithilfe der ersten Klammer berechnet werden:

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

$$x_{3/4} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - \tfrac{24}{4}}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$

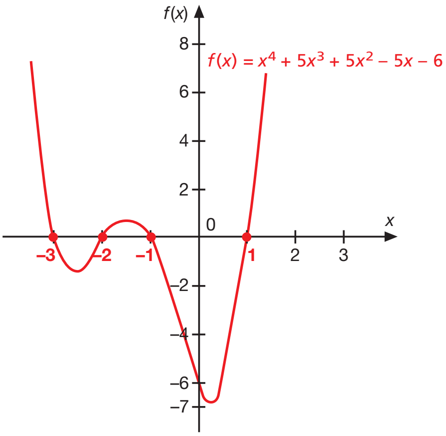
$$\underline{\underline{x_3 = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_4 = -3}}$$

Die Linearfaktordarstellung lautet dann:

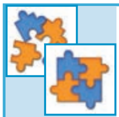
$$f(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$$

Die noch fehlenden Linearfaktoren $(x + 2)$ und $(x + 3)$ hätten übrigens auch durch weitere lineare Abspaltung des Polynoms $x^2 + 5x + 6$ herausgefunden werden können.



Die Polynomdivision ist von den dargestellten Verfahren das rechenaufwendigste. Sie sollte daher nur angewendet werden, wenn sowohl das Ausklammerungs- als auch das Substitutionsverfahren nicht anwendbar ist.

Führt keines der vorgestellten Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen, müssen diese im **Näherungsverfahren** mithilfe einer Wertetafel berechnet werden.



Situation 8

Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 11$.

Lösung

Wegen des vorhandenen Absolutgliedes entfällt das Ausklammerungsverfahren. Das Substitutionsverfahren ist ebenso nicht anwendbar. Ganzzahlige Teiler des Absolutgliedes führen nicht zu $f(x) = 0$, sodass die Polynomdivision auch nicht durchzuführen ist.

Deshalb wird eine Wertetafel angelegt:

x	$f(x)$
-3	-34
-2	-1
-1	$+8$
0	$+11$

Da von $x = -2$ bis $x = -1$ das **Vorzeichen der Funktionswerte wechselt,** muss die gesuchte Nullstelle dazwischen liegen. Man versucht sich jetzt der Nullstelle in der Weise zu nähern, dass man den x-Wert sucht, für den der Funktionswert möglichst nahe bei 0 liegt.

x	$f(x)$
$-1{,}8$	$2{,}144$
$-1{,}9$	$0{,}683$
$-1{,}95$	$-0{,}13$
$-1{,}94$	$0{,}038$

Die Nullstelle liegt also bei $\underline{\underline{x \approx -1{,}94}}$.