3 Stochastik

Grundlagen der Stochastik

Um z. B. Gewinnchancen bei Spielen zu berechnen, sind Grundlagen der Stochastik wichtig. In den folgenden Kapiteln beleuchten wir alle wichtigen Bereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik.

ZENTRALE BEGRIFFE

- **Zufallsexperiment:** ein Versuch mit ungewissem Ausgang
- **Ergebnisraum Ω:** Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes
- **Elementarereignis:** einelementige Teilmenge des Ergebnisraumes, also *ein* mögliches Ergebnis
- **Ereignis:** beliebig große Teilmenge des Ergebnisraumes
- **Sicheres Ereignis:** ein Ereignis, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 % auftreten wird
- **Unmögliches Ereignis:** ein Ereignis, das mit 100 % Wahrscheinlichkeit *nicht* auftreten kann
- **Stichprobe vom Umfang n:** n-maliges Durchführen eines Zufallsexperiments
- **Gegenereignis:** ein Ereignis $\overline{A}$, das automatisch eintritt, wenn das Ereignis A nicht eingetreten ist
- **Schnittmenge zweier Ereignisse $A \cap B$:** alle Ergebnisse, die sowohl zu A als auch zu B gehören
- **Vereinigungsmenge zweier Ereignisse $A \cup B$:** alle Ergebnisse, die mindestens zu einem der Ereignisse A oder B gehören

BEISPIELE

1. Ein klassischer Würfel – mit sechs gleich großen und mit 1 bis 6 durchnummerierten Feldern – wird geworfen. Gib zu den in der linken Tabellenspalte stehenden Begriffen jeweils ein Beispiel an.

Lösung:

Begriff	**Beispiel**
Ergebnis	Eine 1 wird geworfen.
Ergebnisraum	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Zufallsexperiment	Ein klassischer Würfel wird geworfen.
Ereignis	Eine gerade Zahl wird geworfen.
sicheres Ereignis	Eine Zahl zwischen 1 und 6 wird geworfen.
unmögliches Ereignis	Es wird eine 7 geworfen.

2. Ein klassischer Würfel wird geworfen. Drei Ereignisse seien wie folgt definiert:
A: Es fällt eine ungerade Zahl.
B: Es fällt eine Zahl, die größer ist als 2.
C: Es fällt eine Primzahl.
Definiere die Ereignisse A, B, C, $A \cap B$ und $B \cup C$, indem du die jeweiligen Ergebnisräume notierst.

Lösung:

$A = 1; 3; 5$ $B = 3; 4; 5; 6$ $C = 2; 3; 5$

$A \cap B = 3; 5$ $B \cup C = 2; 3; 4; 5; 6$

Wichtige Signalwörter

Beim Betrachten von zufälligen Ereignissen werden die folgenden drei mengentheoretischen Zuordnungen unterschieden:

Signalwort	**Menge**	**math. Notation**	**Bedeutung**
„und“	Schnittmenge zweier Ereignisse A und B	$A \cap B$	„beides gleichzeitig“
„oder“	Vereinigungsmenge zweier Ereignisse	$A \cup B$	„mindestens eines der beiden“
„nicht“	Gegenereignis zu A	$\bar{A}$	„Gegenteil von A“

Wenn du diese drei Zuordnungen kennst und auf konkrete Aufgabensituationen anwendest, kannst du leicht herausfinden, welche Ergebnisse bzw. Wahrscheinlichkeiten bei einer Aufgabe relevant sind.

BEISPIEL

Ein klassischer Würfel wird geworfen. Zwei Ereignisse seien wie folgt definiert:
A: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.
B: Es wird eine Zahl gewürfelt, die kleiner als 5 ist.
Gib zu den folgenden Signalwörtern jeweils an, welche Ergebnisse relevant sind, und notiere das Ereignis in formaler Notation: „entweder A oder B“; „A ohne B“; „weder A noch B“; „sowohl A als auch B“; „mindestens A oder B“; „höchstens A oder B“

Lösung:

Signalwörter	formale Notation	relevante Ergebnisse
entweder A oder B	$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$	6 oder 1, 3
A ohne B	$A \cap \overline{B}$	6
weder A noch B	$\overline{A} \cap \overline{B}$	5
sowohl A als auch B	$A \cap B$	2, 4
mindestens A oder B	$A \cup B$	1, 2, 3, 4, 6
höchstens A oder B	$\overline{A} \cup \overline{B}$	1, 3, 5, 6

Wahrscheinlichkeiten und ihre Notation

Wahrscheinlichkeiten werden mit dem Buchstaben „P“ (engl. probability) notiert. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A heißt also **P (A).** Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A zu bestimmen, musst du wissen, wie viele Ergebnisse es gibt, die zu A gehören. Man sagt auch: **„für A günstige Ergebnisse“.**

Eine Ereigniswahrscheinlichkeit nimmt immer Werte zwischen 0 und 1 an, oder in Prozent:

$$\mathbf{0\,\% \leq P(A) \leq 100\,\%}$$

Manchmal ist es sehr mühsam oder gar nicht möglich, alle für ein Ereignis A günstigen Ergebnisse zu ermitteln und die Anwendung der **Regel der Gegenwahrscheinlichkeit** ist sinnvoll.
Für die Gegenwahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Besonders ist ein Ereignis E, wenn gilt, dass jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist, (z. B. beim Wurf einer nicht manipulierten Münze). Diese Wahrscheinlichkeit ist als **Laplace-Wahrscheinlichkeit** bekannt und für sie gilt:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

BEISPIELE

1. Begründe, ob es sich um LAPLACE-Versuche handelt oder nicht.

(1) In einer Urne befinden sich fünf gleich große Kugeln. Eine Kugel wird gezogen.

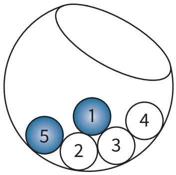
(2) Bei einem Pferderennen treten sechs Reiterinnen und Reiter gegeneinander an. Du sollst den Sieger, also das schnellste Pferd, vorhersagen.

Lösung:

(1) LAPLACE-Experiment, weil die Kugeln gleich groß sind und somit jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen werden kann.

(2) Kein LAPLACE-Experiment, weil es unter anderem von der Leistungsfähigkeit eines Pferdes abhängt, wie schnell es ist bzw. wie groß dessen Gewinnchancen sind. Die Gewinnchancen sind also nicht für alle gleich.

2. In einer Urne befinden sich drei weiße und zwei blaue Kugeln. Die Kugeln sind aufsteigend durchnummeriert (siehe Skizze). Drei Ereignisse seien wie folgt definiert:



A: Eine weiße Kugel wird gezogen.
B: Man zieht eine Kugel mit einer Nummer < 5.
C: Die gezogene Kugel ist blau.
Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, $A \cap B$ sowie $B \cap C$.

Lösung:

$P(A) = \frac{3}{5} = 60\,\%$, da $A = \{2; 3; 4\}$

$P(B) = \frac{4}{5} = 80\,\%$, da $B = \{1, 2, 3, 4\}$ oder schneller mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, da $\overline{B} = \{5\}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{5} = 60\,\%$, da $A \cap B = \{2, 3, 4\}$

$P(B \cap C) = \frac{1}{5} = 20\,\%$, da $B \cap C = \{1\}$

CHECKLISTE: GRUNDLAGEN DER STOCHASTIK

Du solltest nun folgende Fragen beantworten können:

- Welche Fachbegriffe sind zentral für die Stochastik und was bedeuten sie?
- Was ist eine LAPLACE-Wahrscheinlichkeit und wie berechnet man sie?
- Welche besondere Bedeutung haben die Signalwörter „und“, „oder“ bzw. „nicht“?