Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben

Lösungen zu Kapitel 1

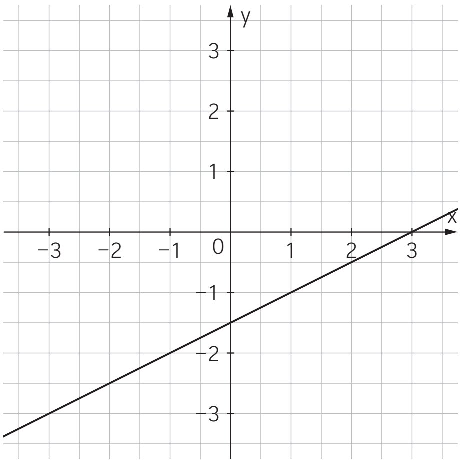
44

1 *Lösungen überprüfen*

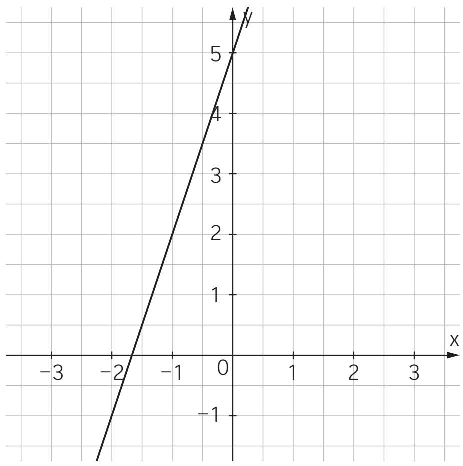
Die Wertepaare aus a und e sind Lösungen der Gleichung.

2 *Lösungsmenge von linearen Gleichungen mit zwei Variablen*

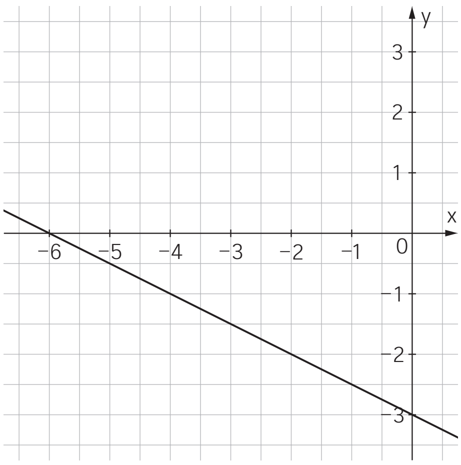
a) $y = 0{,}5x - 1{,}5$



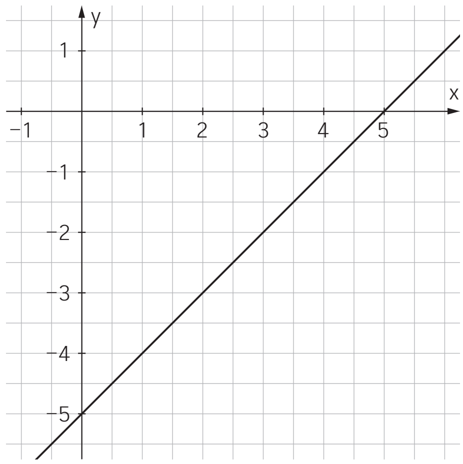
b) $y = 5 + 3x$



c) $y = -0{,}5x - 3$



d) $y = x - 5$



3 *Wer passt zu wem?*

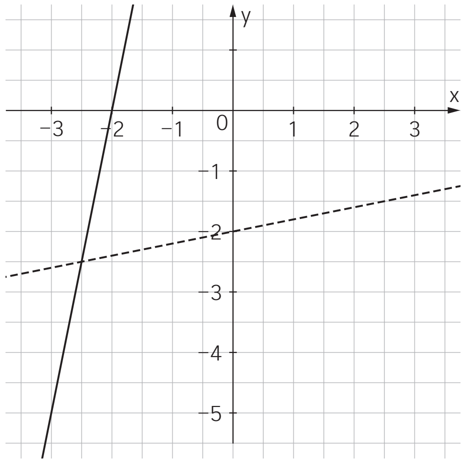
a) Lila b) Rot c) Blau d) Gelb

4 *Stimmt die Lösung?*

Das Gleichungssystem b hat die angegebene Lösung.

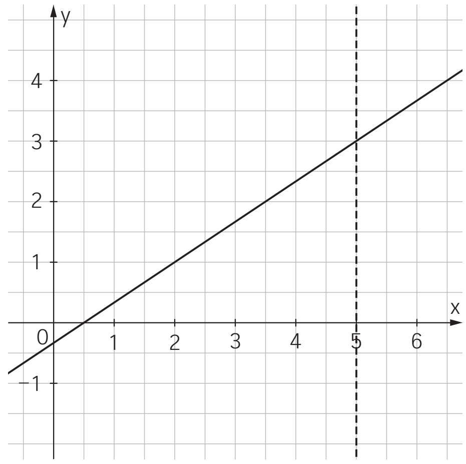
44 **5** *Grafisch Lösen mit Probe*

a) (1) $y = 5x + 10$
(2) $y = 0{,}2x - 2$



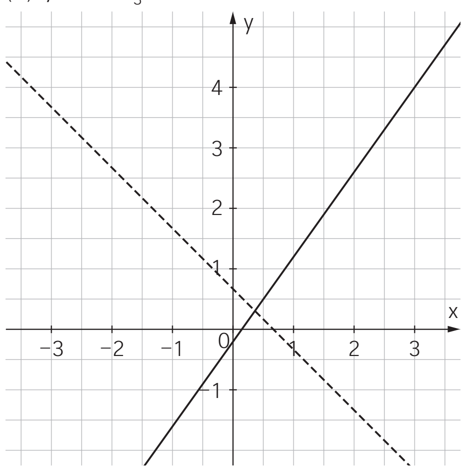
Lösung: $(-2{,}5\,|\,-2{,}5)$

b) (1) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
(2) $x = 5$



Lösung: $(5\,|\,3)$

c) (1) $y = \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}$
(2) $y = -x + \frac{2}{3}$



Näherungslösung: $(0{,}3\,|\,0{,}3)$

6 *Rechnerisch Lösen mit Probe*

a) $x = 3;\ y = 4$ b) $x = -1{,}78;\ y = 3{,}89$ c) $x = 36;\ y = -26$

7 *Wie viele Lösungen?*

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

8 *Gleichungssysteme mit einer Lösung, keiner Lösung, unendlich vielen Lösungen*

a) (A) hat genau eine Lösung, weil die Geraden eine unterschiedliche Steigung haben. (B) hat keine Lösung, weil es sich um zwei Geraden mit gleicher Steigung aber unterschiedlichem y-Achsenabschnitt handelt. (C) hat unendlich viele Lösungen, weil eine Gleichung das Vielfache der anderen ist.

b) Das Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn $m = n$ ist. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn $n = a \cdot m$ und $c = a \cdot b$.

9 *Gleichung ergänzen*

Mit der Gleichung $y = 2x + 6$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, mit $y = x + 2$ hat es genau eine Lösung.

45 **10** *Vogelflug mit und gegen Wind*

x: Fluggeschwindigkeit des Vogels, y: Windgeschwindigkeit

a) $x + y = 3(x - y)$

b) $2y = x$ Der Vogel hat eine doppelt so große Geschwindigkeit wie der Wind.

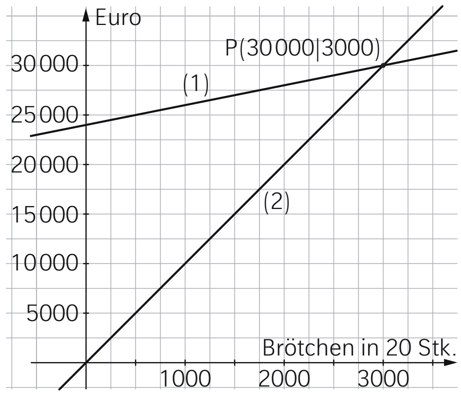
45 **11** *Koordinatengeometrie*

Die Variablen a und b müssen die Werte –2 bzw. 1 annehmen.

12 *Gewinn und Verlust*

a) Die Funktion (1) beschreibt die Kosten-Funktion.
Die Funktion (2) beschreibt die Umsatz- bzw. Erlös-Funktion.

b)



Der Break-Even-Point liegt bei P (3000 | 30000).

13 *Ein Zahlenrätsel*

Es handelt sich um die Zahl 49.

14 *Flussfahrt*

Die Geschwindigkeit des Bootes beträgt stromabwärts $17{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, stromaufwärts $8{,}75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

15 *Mischen*

	50 %ig	10 %ig	20 %ig
Frostschutzmittel	10	30	40
Glycerin	5	3	8

Das zugehörige Gleichungssystem lautet, wenn x bzw. y die Menge des Frostschutzmittel mit 50 %igen bzw. 10 %igen Glycerinanteil bezeichnet:

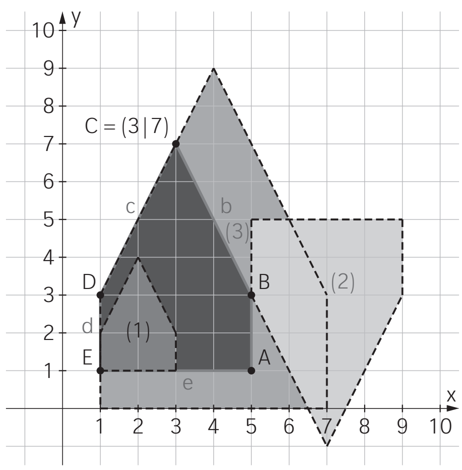
$x + y = 40$

$0{,}5\,x + 0{,}1\,y = 0{,}2 \cdot 40 = 8$

Lösungen zu Kapitel 2

86 **1** *Zentrisch gestrecktes Haus*

a)



b) Es ist $|\overline{A'E'}| = 8$ Längeneinheiten und $|\overline{AE}| = 4$ Längenheinheiten. Daraus folgt sofort $|k| = 2$. Durch Auftragen der Punkte des gestreckten Objektes sieht man, dass $Z = (4\,|\,2)$. Also ist $k = -2$.

2 *Würfelvolumina*

Es ist $V_2 = (2\,\text{cm})^3 = 8\,\text{cm}^3$. Damit ergibt sich $V_4 = 2^3 \cdot V_2 = 64\,\text{cm}^3$ und $V_6 = 3^3 \cdot V_2 = 216\,\text{cm}^3$. Alternativ berechnet man V_4 und V_6 durch unmittelbares Einsetzen der Seitenlänge in die bekannte Volumenformel für den Würfel.

86 **3** *Messprobleme*

a) $\frac{50\,m}{80\,m} = \frac{x}{40\,m}$; $x = 25\,m$ b) $\frac{13\,m}{25\,m} = \frac{x}{75\,m}$; $x = 39\,m$

4 *Ansatz finden*

Linkes Bild: $\frac{9}{4+x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 8$

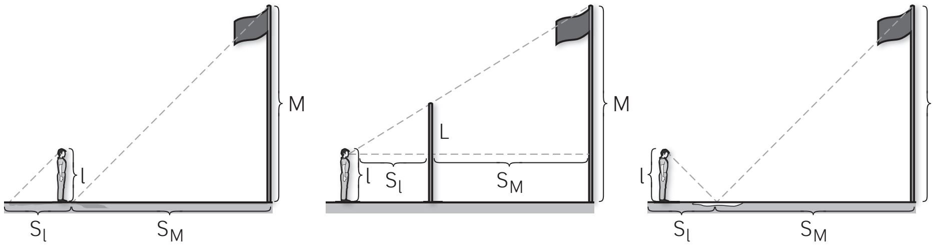
Mittleres Bild: $\frac{12}{4{,}8} = \frac{x}{4{,}2} \Leftrightarrow x = 10{,}5$

Rechtes Bild: $\frac{12}{x} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow x = 15$

5 *Aus einem chinesischen Mathematikbuch*

a) Im linken Bild wird der Schattenwurf der Person mit dem Schatten des Mastes vergleichen und damit auf die Länge des Mastes geschlossen; hierfür müssen die Größe der Person sowie die beiden Schattenlängen gemessen werden. Im mittleren Bild wird mit Hilfe einer Hilfsgröße (Messlatte) und dem ersten Strahlensatz die Höhe des Mastes bestimmt; erforderlich ist die Kenntnis über die Größe der Person, die des „Peilstabes" sowie die Entfernungen Person – Peilstab und Peilstab – Mast. Mit einem Spiegel, der das Bild der Fahne einfängt, wird im dritten Bild unter Ausnutzung des zweiten Strahlensatzes die Höhe des Mastes bestimmt. Bekannt sein müssen hierfür die Distanzen Person – Spiegel, Spiegel – Mast sowie die Größe der Person.

b)



87 **6** *Ähnliche Dreiecke und Vierecke*

a) Das Verhältnis von langer zu kurzer Seite beträgt hier 0,8. Rechtecke, die dies erfüllen, sind z. B. solche mit einer Größe von $8 \cdot 10$, $40 \cdot 50$, $20 \cdot 25$.

b) Es gibt kein einem Rechteck ähnliches Quadrat, da letzteres grundsätzlich ein Seitenverhältnis von 1 : 1 hat.

c) Ja.

7 *Ähnliche Vierecke*

Zueinander ähnlich sind A und E, B und H, F und G, H und E. Die Figuren B und H, sowie F und G lassen sich durch Drehung sogar in Deckung bringen.

8 *Bälle im Vergleich*

a) Die Oberfläche des Hallenfußballs O_H beträgt $O_H = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (10{,}5\,cm)^2 \approx 1385{,}44\,cm^2$, die des Tennisballs $O_T \approx 153{,}94\,cm^2$. Damit beträgt das Verhältnis beider $\frac{O_H}{O_T} \approx 8{,}99$. Somit benötigt man für den Hallenfußball gegenüber dem Tennisball ungefähr das Neunfache an Material.

b) Es ist $V_H = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \approx 4849{,}05\,cm^3$ und $V_T \approx 179{,}59\,cm^3$, also $\frac{V_H}{V_T} \approx 27$.

Anmerkung: Beide Ergebnisse erhält man wegen $r_H = 3 \cdot r_T$ sofort, $O_H = 3^2 \cdot O_T$ und $V_H = 3^3 \cdot V_T$.

9 *Vergrößerte Fotos*

a) Das Verhältnis der Seitenlänge beträgt bei Elins Bild ungefähr 1,51. Die entspricht am ehesten einem Foto mit den Maßen $10 \cdot 15$.

b) Als Posterformate eignen sich $30 \cdot 45$, $40 \cdot 60$ und $50 \cdot 75$

10 *Trapezförmiges Grundstück*

Laut erstem Strahlensatz ist $\frac{25\,m}{x} = \frac{40\,m}{40\,m - x} \Leftrightarrow x \approx 15{,}38\,m$.

11 *Quadratfigur*

Die 0. Stufe hat einen Flächeninhalt von $A_0 = 729\,cm^2$. Der Inhalt der n-ten Stufe A_n ergibt sich nun zu $A_n = A_{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot A_0$, also $A_1 = 1053\,cm^2$, $A_2 = 1161\,cm^2$, $A_3 = 1197\,cm^2$.

MATHEMATIK NEUE WEGE, ISBN 978-3-507-85779-L, Schroedel

Lösungen zu Kapitel 3

118 **1** *Wo liegt eine Zahl auf der Zahlengeraden?*
$\frac{6}{4} \rightarrow D$; $-\sqrt{0{,}1} \rightarrow B$

2 *Irrational?*
$\sqrt{24}$, $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt{250}$

3 *Welche Art von Zahl ist es nun?*
$\sqrt{36}$

4 *Rational oder irrational?*
$\sqrt{121}$, $\sqrt{10\,000}$, $\sqrt{1\,000\,000}$

5 *Quadrieren und Wurzelziehen*
a) 3 b) 5 c) $\frac{2}{81}$ d) 25 e) 6 f) nicht definiert

6 *Rechnen mit Wurzeln*
a) 6 b) 12 c) 1 d) $\frac{6}{3}$ e) 2

7 *Teilweises Wurzelziehen*
a) $2\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $10\sqrt{10}$ d) $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ e) $20\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{\frac{1}{10}}$

8 *Addition von Wurzeln*
a) $\sqrt{11}$ b) $3\sqrt{11} - 3\sqrt{10}$ c) $3\sqrt{5}$

9 *Multiple Choice – Mehrfach-Auswahl-Antworten*
Die rationalen Zahlen sind genau jene
b) die nicht irrational sind,
c) die als Brüche aus zwei ganzen Zahlen darstellbar sind,

10 *Rechenoperationen und Geometrie*
a) $x \cdot x = x^2 = A$ b) $A : x = \frac{A}{x} = x$

119 **11** *Besondere Radikanden*
a) Der Radikand darf nie negativ sein. $\sqrt{-100}$ ist nicht definiert. b) $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

12 *Irrationale Zahlen und GTR*
a) Man rechnet mit einer Nachkommastelle, z. B.: $a = 2{,}25 \rightarrow \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.
b) 58 Nachkommastellen zeigt der Taschenrechner nicht an. Daher könnte man vermuten, dass die Dezimaldarstellung nicht abbrechend und nicht periodisch ist. Mit dieser Vermutung wäre die Zahl irrational.

13 *Verrücktes zu Zahlen*
Eva stellt fest, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist.
Das Produkt aus zwei irrationalen Zahlen kann also durchaus eine rationale Zahl sein, ist es jedoch im Allgemeinen nicht.

14 *Vergrößerungsfaktor*
a) 1 : 2 b) $1 : \sqrt{50}$

15 *Flächenvergrößerung*
Kantenlänge der Quadrate vom kleinsten bis zum größten: 1 m, $\sqrt{2}$ m, $\sqrt{3}$ m, 2 m
Kantenlänge der Quadrate vom kleinsten bis zum größten im Maßstab 1 : 10: 10 cm, 14,41 cm, 17,73 cm, 20 cm

16 *Heron-Verfahren*

$x_0 = 20$	$x_0 = 444$
$x_1 = 0{,}5 \cdot \left(20 + \frac{444}{20}\right) = 21{,}1$	$x_1 = 0{,}5 \cdot \left(444 + \frac{444}{444}\right) = 222{,}5$
$x_2 = 21{,}07132701$	$x_2 = 112{,}2477528$
$x_3 = 21{,}07130751$	$x_3 = 58{,}10164428$
$x_4 = 21{,}07130751$	$x_4 = 32{,}87171228$
$x_5 = 21{,}07130751$	$x_5 = 23{,}18938325$

Das Heron-Verfahren ist ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$. Wenn man als Startwert bereits eine gute Näherung wählt, führt dieses Verfahren schneller zum Ergebnis.

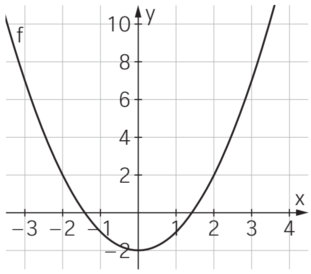
119 **17** *Tsunamis*

Wassertiefe w in m	50	75	100	500	1000	2000	5000	8000
Geschwindigkeit v in km/h	563,47	845,21	1126,94	5634,71	11 269,43	22 538,86	86 347,14	90 155,42

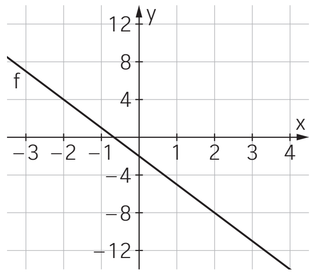
Lösungen zu Kapitel 4

161 **1** *Von der Tabelle zum Graphen zur Funktionsgleichung*

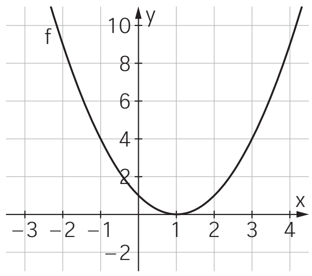
a) Funktion 1:



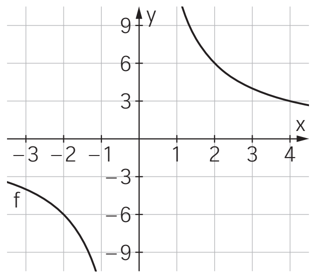
Funktion 2:



Funktion 3:



Funktion 4:



b) Die Funktionen 1 und 3 sind quadratische Funktionen. Bei der Funktion 2 handelt es sich um eine lineare Funktion. Funktion 4 stellt eine antiproportionale Funktion dar.

c) Funktion 1: $y = x^2 - 2$ | Funktion 2: $y = -3x - 2$
Funktion 3: $y = x^2 - 2x + 1$ | Funktion 4: $y = \frac{12}{x}$

2 *Fragen an drei quadratische Funktionen*

(1) a) P(0|6), Q(−1,73|0), R(1,73|0)
b) P(0|−2,5), Q(−1|0), R(5|0)
c) P(0|1), Q(0,38|0), R(2,61|0)

(2) a) Ja, der Punkt gehört zum Graphen.
b) Nein, der Punkt gehört nicht zum Graphen. Richtig wäre G(11|36).
c) Nein, der Punkt gehört nicht zum Graphen. Richtig wäre G(−4|29).

(3) a) P(−1|4), Q(1|4)
b) P(−2,12|4), Q(6,12|4)
c) P(−0,79|4), Q(3,79|4)

(4) Die Funktionen f und g schneiden sich in den Punkten P(−1,49|1,58) und Q(2,29|−4,46). Die Funktionen f und h schneiden sich in den Punkten R(−0,88|4,44) und S(1,88|−1,1). Es gibt keinen Schnittpunkt zwischen den Funktionen g und h.

3 *Bestimmung und Untersuchung einer Parabel*

a) $y(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$
Der Punkt liegt also nicht auf der Parabel.

b) $y_1 = -8$; $y_2 = -15$

c) $x_1 = 1 \pm \sqrt{3}$; x_2 ist keine reelle Zahl.

4 *Parabeln bewegen*

a) $y = (x - 2)^2$
b) $y = (x + 1)^2 + 3$
c) $y = 0{,}5x^2 + 4$
d) $y = -x^2$
e) $y = x^2$
f) $y = -x^2 + 1$
g) $y = -x^2 - 1$

161 **5** *Wanted*

1) Da der Scheitelpunkt bekannt ist, verwenden wir zum Aufstellen der Gleichung die Scheitelform: $y = a(x-d)^2 + e$
Der Streckfaktor α ist zunächst unbekannt, während wir die Koordinaten des Scheitels einsetzen können:
$y = a(x+1)^2 + 4$
Da der Punkt (3|0) auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Durch Einsetzen können wir also α berechnen:
$$0 = a(3+1)^2 + 4$$
$$0 = 16a + 4$$
$$-4 = 16a$$
$$a = -\tfrac{1}{4}$$
$y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 4$; N(−5|0)

2) Da der Scheitelpunkt bekannt ist, verwenden wir zum Aufstellen der Gleichung die Scheitelform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$
Der Streckfaktor α ist zunächst unbekannt, während wir die Koordinaten des Scheitels einsetzen können:
$y = a(x-2)^2 + 4$
Da der Punkt (5|−1) auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Durch Einsetzen können wir also α berechnen:
$$-1 = a(5-2)^2 + 4$$
$$-1 = 9a + 4$$
$$-5 = 9a$$
$$a = -\tfrac{5}{9}$$
$y = -\frac{5}{9}(x-2)^2 + 4$; P(3|3,44)

3) Einsetzen der Koordinaten in die allgemeine Form einer Parabel ergibt die Funktionsgleichung $y = 0{,}5x^2 + 3x + 2$

4) $y = (x+3)\cdot(x-6)$
Der Scheitel liegt bei S(1,5|−20,25).

162 **6** *Vom Graph zur Funktionsgleichung*

a) (1) $y = 0{,}5x^2 - x - 4$ (2) $y = 0{,}5x + 2$ (3) $y = 0{,}5(x-2)^2$ (4) $y = -2x^2 + 1$ (5) $y = -2x + 4$

b) Rote Parabelschar: Die Scheitelpunkte sind alle von der Form S(d|d), außerdem handelt es sich jeweils um eine verschobene Normalparabel. Somit lautet die Scheitelpunktform der Schar $f_d(x) = (x-d)^2 + d$.
Blaue Parabelschar: Die Scheitelpunkte sind alle von der Form S(−4|e), außerdem handelt es sich jeweils um eine verschobene Normalparabel. Somit lautet die Scheitelpunktform der Schar $f_e(x) = (x+4)^2 + e$.

7 *Training im rechnerischen Lösen von Gleichungen*

a) $x = \pm 3$	b) keine Lösung	c) $x = 2$	d $x_1 = -7$; $x_2 = 0$
e) $x_1 = -7{,}36$; $x_2 = -1{,}36$	f) $x = \frac{24}{11}$	g) $x_1 = 5{,}32$; $x_2 = -1{,}32$	h) $x = \pm 2$
i) $x = \pm\sqrt{5}$	j) keine Lösung	k) $x_1 = 1$	l) $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -4$
m) $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = 0$	n) $x_1 = 2{,}12$; $x_2 = -2{,}12$	o) keine Lösung	p) keine Lösung

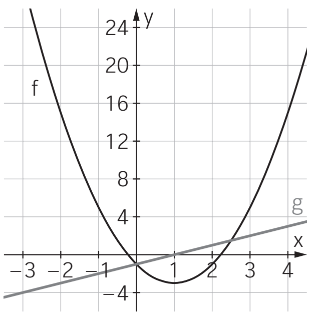
8 *Lösung gegeben-Gleichung finden*

a) $y = (x+2)(x-2) = x^2 - 4$
b) $y = x^2 - 7$
c) $y = (x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$

9 *Nullstellen und Schnittpunkte*

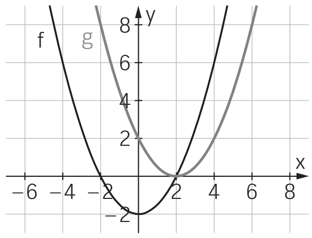
a) Nullstellen: $x_1 = -2{,}24$; $x_2 = 2{,}24$
b) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$
c) Nullstellen: $x_1 = -0{,}41$; $x_2 = 2{,}41$
Die Funktionen f und g schneiden sich in P(−3,83|9,66) und Q(1,82|−1,66).
R(−1,30|−3,20) und S(2,30|0,30) sind Schnittpunkte der Funktionen f und h.
Die Funktionen g und h schneiden sich in (−0,15|−1,33) und (2,15|−1,33).

10 *Funktionen und Gleichungen*

a)


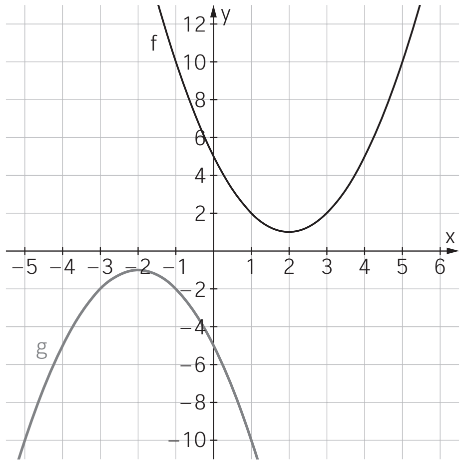
2 Schnittpunkte: S(0/-1), S(2,5/1,5)

162 **10** b)



1 Schnittpunkt: S(2/0)

c)



Kein Schnittpunkt

11 *Funktionenzoo*

Proportional:	–
Antiproportional:	$f(x)$
Linear:	$g(x)$, $d(x)$, $j(x)$, $i(x)$
Konstant:	–
Quadratisch:	$a(x)$, $c(x)$, $h(x)$
Etwas anderes:	$e(x)$, $b(x)$

163 **12** *Parabeln und binomische Formeln*

a) In diesem Fall ist der Scheitelpunkt die Nullstelle.
Die Scheitelpunktform ist von der Form $f(x) = a(x - z)^2$ und entspricht daher der faktorisierten Form.

b) f) Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt und einzigem Nullpunkt $(-a|0)$.

g) Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel mit den Nullstellen $(a|0)$, $(-a|0)$ und dem Scheitelpunkt $(0|-a^2)$.

13 *Tangenten an Parabeln*

a) Es gibt jeweils nur einen gemeinsamen Punkt, also handelt es sich jeweils um Tangenten.
(1) $B(1|1)$ (2) $B(-2|8)$ (3) $B(3|0)$

b) Die Berechnung eines Berührpunkts führt immer auf eine quadratische Gleichung, die genau eine Lösung besitzt (der Wurzelteil in der pq- Formel wird Null).
Tangente $y = 4x - 7$. Berührpunkt ist hier $B(2|1)$.
Ein Beispiel für eine weitere Tangente ist $y = 6x - 12$. Berührpunkt ist dann $(3|6)$.

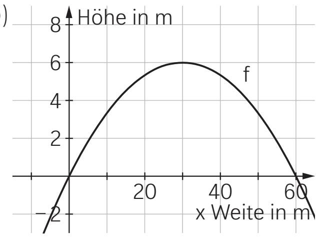
14 *Einwurf und Freistoß beim Fußball*

a)

x	0	1	2	4	6	8	10	11
y	2	2,9	3,6	4,4	4,4	3,6	2,0	0,9

$y(x) = 0$ für $x_1 = 5 - 3\sqrt{5} \approx -1{,}7$; $x_2 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 11{,}7$
$y(5) = 4{,}5$
Der Ball hat in 5 m Entfernung mit 4,5 m Höhe den höchsten Punkt erreicht. Danach senkt sich der Ball und schlägt in 11,7 m Entfernung auf dem Boden auf. Er wurde in 2 m Höhe abgeworfen.

163 **14** b)



Der Scheitelpunkt muss aus Symmetriegründen die Koordinaten S(30/6) haben. Die passende Funktionsgleichung ist (3): $f(x) = -\frac{1}{150}x^2 + \frac{2}{5}x$, hier stimmen Weite und Maximalhöhe mit den Vorgaben überein.

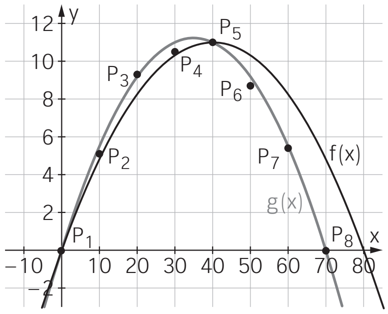
15 *Ein Golfball*

Vorzeichenfehler in Auflage 1; Korrektur: $h(w) = 0{,}0025\,w(200 - w)$

a) Die Nullstellen kann man aus der faktorisierten Form ablesen: übereinstimmend mit dem angegebenen Graphen liegen diese bei 0 und 200. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt aus Symmetriegründen bei $w = 100$. Wegen $h(100) = 25$ stimmt auch die y-Koordinate mit der Zeichnung überein.

b) $h(40) = 0{,}0025 \cdot 40(200 - 40) = 16$
Nach 40 m hat der Golfball eine Höhe von 16 m.

c) Die maximale Höhe bei $x = 100\,\text{m}$ beträgt 25 m.
Der Ball liegt bei $x = 22{,}54\,\text{m}$ und $x = 177{,}46\,\text{m}$ 10 m hoch in der Luft.



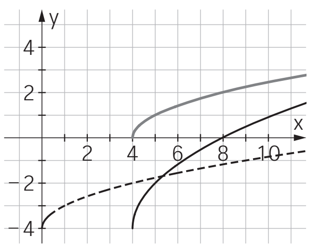
Lösungen zu Kapitel 5

189 **1** *Wurzelfunktionen und Definitionsmengen*

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 5\}$ c) $D = \{x \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$

2 *Graphen von Wurzelfunktionen zeichnen*

a) um 4 nach rechts verschoben
b) um 4 nach unten verschoben
c) gestreckt mit Faktor 2, um 4 nach rechts und um 4 nach unten verschoben



3 *Wurzelgleichungen lösen*

a) $x_1 = \frac{6}{8}$, $x_2 = -1$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = 8$

4 *Die Umkehrung einer Funktion*

Eine Funktion f: $D \to Z$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn zu jedem Wert aus Z genau ein Wert aus D gehört. Schreibe $f(x) = y$.
Löst man dies nach x auf, so erhält man die Umkehrfunktion $f_{inv}: Z \to D$, $f_{inv}(y) = x \in D$ so, dass $f(x) = y$.

189 **5** *Eine Quadratische Funktion umkehren*

a) Die Funktion hat ein Minimum in (0, 0) und es ist $D_f = \{x: x \in \mathbb{R}\}$.
Wegen $y = 2 \cdot x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2}}$, also $f_{inv}(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$ mit $D_{f_{inv}} = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$.

b) Die Funktion hat ein Minimum in (0, −2) und es ist $D_f = \{x: x \in \mathbb{R}\}$.
Wegen $y = x^2 - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 2}$ ist $f_{inv}(y) = \sqrt{y + 2}$ mit $D_{f_{inv}} = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -2\}$.

c) Die Funktion hat ein Minimum in (1, −1) und es ist $D_f = \{x: x \in \mathbb{R}\}$.
Wegen $y = x^2 - 2 \cdot x \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1} + 1$ ist $f_{inv}(y) = \sqrt{y + 1} + 1$ mit $D_{f_{inv}} = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -1\}$.

6 *Parabel oder nicht?*

Eine Parabel ist definiert als die Menge aller Punkte, die sowohl von der Leitlinie l als auch vom Brennpunkt F den gleichen Abstand haben. Wenn also die dargestellte Kurve K eine Parabel ist, dann wird ein Kreis, dessen Mittelpunkt M sich auf K befindet und der den Radius $|\overline{MF}|$ hat, auch l in einem Punkt schneiden.

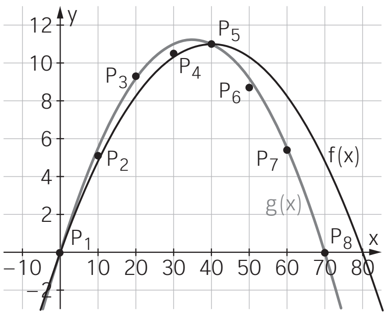
7 *Wie entsteht eine Parabel?*

a) Konstruiere Kreise mit beliebigem Radius R um F; zu jedem Kreis um F zeichne einen Kreis um einen beliebigen Punkt auf l vom Radius R. Die Parabel ergibt sich nun als Menge aller Schnittpunkte jeweils zweier entsprechender Kreise.

b) $y(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2$

8 *Hammerwerfen*

Ansatz 1: Nullstellen sind 0 und 70, also wählt man als Ansatz die Funktion $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 70)$ in faktorisierter Form.
Es soll $f(40) = 11$ gelten, also muss man hier $a = \frac{11}{1200}$ wählen.
Ansatz 2: Höchster Punkt ist der Scheitelpunkt $S(40|11)$, also wählt man als Ansatz die Funktion $g(x) = a \cdot (x - 40)^2 + 11$ in Scheitelpunktform.
Es soll $g(0) = 0$ gelten, also muss man hier $a = -\frac{11}{1600}$ wählen.
Vergleicht man die beiden Ansätze (siehe Grafik), so stellt man fest, dass Ansatz 1 hier ein deutlich besseres Ergebnis liefert als Ansatz 2.



Lösungen zu Kapitel 6

219 **1** *Berechne die fehlende Seite*

a) c = 15 b) a = 5 c) b = 24 d) b = 45

2 *Berechnung an Dreiecken*

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a	4	3,9	9,8	3	$\sqrt{5}$
b	6	5	5		$\sqrt{20}$
c	6,9	8	12	6	5
h	3,5	2	4		2
p	2	3,4	9		1
q	4,9	4,6	3	2	4

Die Ergebnisse in der Tabelle sind auf eine Nachkommastelle gerundet.
Mit den gegebenen Angaben ist es nicht möglich, Dreieck (4) zu konstruieren, da sich für die Höhe h hier keine reelle Zahl ergibt.
Es handelt sich bei (5) um ein rechtwinkliges Dreieck.

219 **3** *Rechtwinklig oder nicht*

a) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 10\,\text{cm}$ lang sein.
b) Das Dreieck ist rechtwinklig. Der Satz des Pythagoras gilt mit den angegebenen Seitenlängen.
c) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 7{,}8\,\text{cm}$ lang sein.
d) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 0{,}9\,\text{m}$ lang sein.

4 *Abstandsberechnung*

a) Für den Abstand d zweier Punkte im Zweidimensionalen gilt unter Berücksichtigung des Satzes von Pythagoras für die Punkte $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

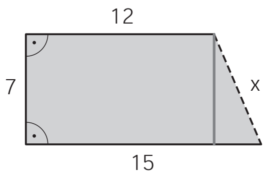
$c = \overline{AB} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} \approx 3{,}6$

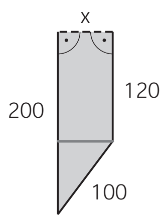
$b = \overline{AC} = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{36 + 16} \approx 7{,}2$

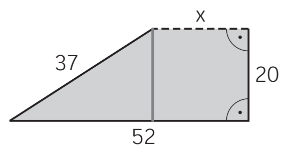
$a = \overline{BC} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{64 + 1} \approx 8{,}1$

b) Überprüfen mit dem Satz des Pythagoras zeigt, dass das Dreieck rechtwinklig ist: $13 + 52 = 65$.

5 *Seitenlänge im Trapez*







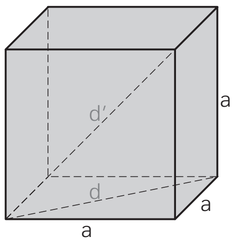
a) $x = \sqrt{7^2 + (15 - 12)^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}6$
b) $x = \sqrt{100^2 - (200 - 120)^2} = \sqrt{3600} = 60$
c) $d = \sqrt{37^2 - 20^2} = \sqrt{969} \approx 31{,}1$; also ist $x = 52 - d \approx 52 - 31{,}1 = 20{,}9$

6 *Längen im Dreieck*

a) $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$
$y + 3 = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{84} \approx 9{,}2$
$y = 9{,}2 - 3 = 6{,}2$

b) $x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$
$y + 4 = \sqrt{12^2 - x^2} = \sqrt{96} \approx 9{,}8$
$y = 9{,}8 - 4 = 5{,}8$

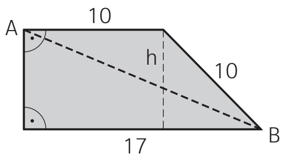
220 **7** *Raumdiagonale im Würfel*



a) $d = \sqrt{30^2 + 30^2} \approx 42{,}4$
$d' \approx \sqrt{42{,}4^2 + 30^2} = \sqrt{2700} \approx 52$

b) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$
$d' = \sqrt{d^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3}\,a$

220 **8** *Rückwärts rechnen*



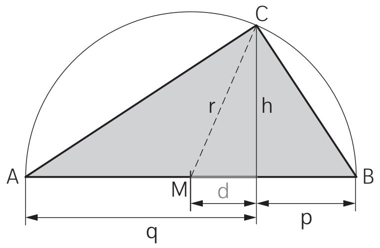
$h = \sqrt{10^2 - (17 - 10)^2} = \sqrt{51} \approx 7{,}1$

$\overline{AB} = \sqrt{h^2 + 17^2} = \sqrt{340} \approx 18{,}4$

9 *Entscheiden ohne Winkelmesser*

a) Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich nach vorherigem Ausmessen überprüfen, ob es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Ergeben die quadrierten Längen der beiden Katheten zusammen die quadrierte Länge der Hypotenuse, so handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck.

b) Mithilfe von Lineal und Zirkel kann probiert werden, ob der Satz des Thales im vorgegebenen Dreieck gilt: Liegt der dritte Punkt auf dem Halbkreis, ist das Dreieck rechtwinklig.



10 *Etwas zum Nachdenken*

Es soll geprüft werden, ob die Schrankdiagonale d beim schrägen Aufstellen nicht zu hoch ist.

$d = \sqrt{0{,}8^2 + 2{,}3^2} = 0{,}64 + 5{,}29 \approx 2{,}44$

Der Schrank ist also zu hoch für den Raum, falls er schräg aufgestellt werden soll.

11 *Rechtwinkliges Dreieck*

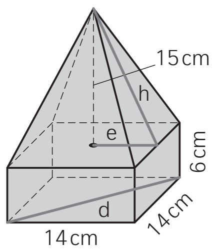
a) Nein, das neue Dreieck ist nicht mehr rechtwinklig.

b) Ja, das neue Dreieck ist rechtwinklig.

12 *Kirchturm*

a) Der gesamte Kirchturm ist 21 m hoch, da zur Pyramidenhöhe noch die Höhe des Quaders dazukommt.

b) Zunächst müssen die Höhe der Dreiecke und die Diagonale d eingezeichnet werden.



Die Höhe h berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus

$h = \sqrt{(15\,m)^2 + (7\,m)^2} \approx 16{,}6\,m$

Jede Dreiecksfläche berechnet sich mit der Formel $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Damit gilt für die 4 Dreiecksflächen

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 14\,m \cdot 16{,}6\,m = 116{,}2\,m^2$.

Es ergibt sich daraus eine Gesamtfläche von ca. $464{,}8\,m^2$.

c) Das Volumen einer Pyramide berechnet sich durch $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (14\,m)^2 \cdot 15\,m = 980\,m^3$.
Dazu kommt noch das Volumen des Quaders: $V_2 = (14\,m)^2 \cdot 6\,m = 1176\,m^3$.
Insgesamt hat der obere Teil des Kirchturms ein Volumen von $2156\,m^3$.

13 *Tor für ein Grundstück*

Für alle horizontalen Holzstücke ergibt sich eine Länge von $3 \cdot 3{,}2\,m = 9{,}6\,m$.
Für alle vertikalen Holzstücke ergibt sich eine Länge von $5 \cdot 1{,}6\,m = 8\,m$.
Übrig bleiben noch 8 diagonale Holzstücke. Die Länge einer Diagonalen d ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras aus

$d = \sqrt{\left(\frac{3{,}2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1{,}6}{2}\right)^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{2} \cdot 0{,}8$

Insgesamt werden also $\sqrt{2} \cdot 0{,}8 \cdot 8\,m + 8\,m + 9{,}6\,m \approx 26{,}7\,m$ Holz benötigt.

220 **14** *Ausdehnung bei Erwärmung*

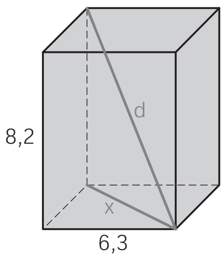
Die Höhe h ergibt sich aus

$h = \sqrt{(250{,}08\,m)^2 - (250\,m)^2} \approx 6{,}32\,m$.

221 **15** *Die Sache mit dem Strohhalm*

a) Der Strohhalm rutscht in die Packung, weil er nur so lang ist wie die Flächendiagonale der vorderen Packungsfläche. Die Raumdiagonale der Packung ist aber länger.

b)



$x = \sqrt{(4{,}2\,cm)^2 + (6{,}3\,cm)^2} \approx 7{,}57\,cm$

Die Raumdiagonale d ergibt sich als $d = \sqrt{x^2 + (8{,}2\,cm)^2} \approx 11{,}16\,cm$.

Der Strohhalm muss mindestens 11,16 cm lang sein, um nicht in die Packung hinein zu rutschen.

Bei einer Befestigung außen an der Packung würde ein so langer Strohhalm jedoch über den Rand hinausragen.

16 *Nützliche Formeln*

Schüleraktivität.

In dieser Aufgabe wird die praktische Relevanz des Satzes des Pythagoras für die Herleitung wichtiger geometrischer Formeln deutlich. Die Schülerinnen und Schüler begreifen durch die Anwendung des Satzes die Struktur der Formeln.

Diagonale im Rechteck	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Diagonale im Quadrat	$d = \sqrt{a^2 + a^2}$
Raumdiagonale im Würfel	$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$
Raumdiagonale im Quader	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Flächeninhalt beim gleichseitigen Dreieck	$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$
Flächeninhalt beim regelmäßigen Sechseck	$A = \frac{3a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$

17 *Eine besondere Herausforderung*

Raute: Es gilt $\overline{BD} = f$ und $\overline{AE} = 2a$

Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt nach dem Satz des Pythagoras: $e^2 + f^2 = (2a)^2 = 4a^2$

Parallelogramm: Im Dreieck AFC gilt: $e^2 = h^2 + (a + d)^2$

Im Dreieck EBD gilt: $f^2 = h^2 + (a - d)^2$

Addition ergibt: $e^2 + f^2 = 2h^2 + (a + d)^2 + (a - d)^2$

Im Dreieck AED gilt: $h^2 = b^2 - d^2$

Einsetzen ergibt: $e^2 + f^2 = 2b^2 - 2d^2 + (a + d)^2 + (a - d)^2$

Durch Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhält man die angegebene Formel.

18 *Suchen in der Wüste*

a) Bis zum Punkt A ist er einen Kilometer gelaufen, bis zum Punkt B drei Kilometer, bis zum Punkt C sechs Kilometer und bis zu Punkt D insgesamt 10 Kilometer.

Entfernung von seinem Wagen W: $\overline{WA} = 1$

$\overline{WB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2\,km$

$\overline{WC} = \sqrt{(3 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\,km$

$\overline{WD} = \sqrt{(4 - 2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\,km$

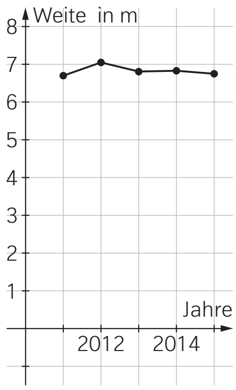
b) Bis zum Punkt J muss er insgesamt 55 km laufen.

c) Gerade Strecke vom Wagen bis zu J in km: $\overline{WJ} = \sqrt{5^2 + 6^2} \approx 7{,}8\,km$

Lösungen zu Kapitel 7

251 **1** *Weitsprung*

a) Bei Betrachtung des Diagramms scheint es so, als habe sich die größte Steigerung in den Bestleistungen im Jahr 2012 getan. Danach folgte ein starker Abfall in der Bestweite im Jahr 2013. Selbiges Niveau wurde auch im darauffolgenden Jahr erreicht. Ein weiterer Abfall erfolgte dann im Jahr 2015.

b) 

Weil auf der vertikalen Achse in der Abbildung zu a) die Null fehlt, entsteht der Eindruck, dass die Änderungen in den Weiten in den aufgeführten Jahren sehr schwanken. Mit Hinzufügen der Null zeigt sich ein anderes Bild: Die Weiten verhalten sich langfristig gesehen eher konstant mit einer leichten Abweichung nach oben im Jahr 2012.

2 *Vierfeldertafeln ergänzen und auswerten*

a) Leichtathletik

	E	K	
m	25	26	51
w	11	22	33
	36	48	84

b) Volleyball

	E	K	
m	20	16	36
w	18	8	26
	38	24	62

3 *Vierfeldertafel in Prozent*

a)

	am Ort	auswärts	gesamt
m	15 %	27 %	42 %
w	32 %	26 %	58 %
gesamt	47 %	53 %	100 %

b)

	am Ort	auswärts	gesamt
m	150	270	420
w	320	260	580
gesamt	470	530	1000

c) $P(\text{Junge}) = 0{,}42$; $P(\text{Auswärtig}) = 0{,}53$

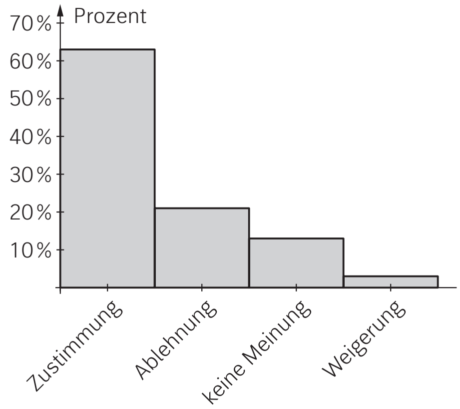
$P(\text{Junge} \mid \text{Auswärtig}) = \frac{P(\text{Junge und Auswärts})}{P(\text{Auswärts})} = \frac{0{,}27}{0{,}53} \approx 51\,\%$

4 *Vorsicht: Piktogramme*

a)

Zustimmung	63 %
Ablehnung	21 %
keine Meinung	13 %
Weigerung	3 %

251 4



b) Bei der Darstellung mit Piktogrammen sollten die Werte der Datenreihe dem Flächeninhalt des Piktogramms entsprechen. Man muss dabei bedenken, dass bei Vergrößerung eines Piktogramms um den Faktor k der Flächeninhalt um den Faktor k^2 größer wird. Das vergrößerte Piktogramm erweckt dann den Eindruck, als sei das dargestellte Merkmal um den Faktor k^2 größer geworden.
Das Umfrageergebnis von 63 % für die „Zustimmung" ist 3-mal so groß wie das Umfrageergebnis von 21 % für die „Ablehnung". Gleiches Verhältnis müssen die Flächeninhalte der beiden Piktogramme haben, also gilt $k^2 = 3$. Die Längen müssen folglich im Verhältnis $k = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ zueinander stehen, was nicht der Fall ist (im Bild ist $k \approx 2{,}7$ abzulesen).
Das Piktogramm ist in dieser Form deshalb irreführend. Besser wäre ein Balkendiagramm mit waagerechten Balken, bestehend z. B. aus Strichmännchen, für je 10 Prozent eine Figur.

252 5 *Interpretieren von Grafiken*

Diagramme, Schaubilder, Piktogramme werden sehr häufig dazu verwendet, Daten übersichtlich darzustellen und um Zusammenhänge und Folgerungen aus den Daten abzuleiten bzw. zu begründen. Graphische Darstellungen von Daten dienen jedoch häufig auch dazu, bestimmte Aspekte stark zu betonen oder falsche Zusammenhänge vorzutäuschen.
Hier sind einige Regeln, die man grundsätzlich immer beherzigen sollte, wenn man auf Statistiken trifft:

- Wenn du graphische Darstellungen betrachtest, dann achte stets auf
  - die Art des Diagramms, (eignet es sich überhaupt für den dargestellten Sachverhalt?),
  - die Größen, die dargestellt sind,
  - die vorliegende Skalierung (gibt es Sprünge oder Verzerrungen),
  - die Größe, Form und Farbe der Graphik.
- Überprüfe, ob irgendwelche Daten nicht berücksichtigt wurden.
- Finde heraus, wer die Statistik in Auftrag gegeben hat, wie die Daten erhoben wurden und was miteinander verglichen wird.
- Stammen die Daten von einer Befragung? Wenn ja, welche Fragen wurden von wem gestellt, und wer wertete diese Fragen in wessen Auftrag aus?
- Welche Schlussfolgerungen werden gezogen? Werden diese durch die graphische Darstellung unterstützt?
- Welche Informationen kannst du zusätzlich aus der Graphik ablesen?

6 *Daten und irreführende Grafiken*

(1) Durch die fehlende Skalierung auf Null auf der y-Achse wirkt es so, als habe sich das Haushaltseinkommen von 2011 auf 2014 fast verfünffacht. Betrachtet man die Daten genauer, so zeigt sich, dass das Einkommen nur um ca. 30 Euro gestiegen ist, dies entspricht einer Steigerung von ca. 10 Prozent.
(2) Durch die erhöhte Dicke der Säule für das Jahr 2013 wird optisch eine größere Steigerung des Keksverkaufes suggeriert, als die Zahlen zeigen.
(3) Die Umdrehung der Nummerierung der vertikalen Achse suggeriert eine Steigerung der Besucherzahlen, obwohl in der Realität ein Rückgang zu verzeichnen ist.
(4) Durch die schräge Ansicht auf die Säulen wird eine optische Einschätzung der Höhe der Säulen erschwert. Der monatliche Gewinn, der im August erzielt wurde, erscheint dadurch höher als real.

252 **7** *Vielleser?*

a)

	Vielleser	Wenigleser	gesamt
M	29,4 %	30,6 %	60 %
J	14 %	26 %	40 %
gesamt	43,4 %	56,6 %	100 %

b) Der Anteil an Viellesern kann direkt aus der Vierfeldertafel abgelesen werden. Er beträgt 43,4 Prozent. Der Anteil an Mädchen unter den Viellesern berechnet sich als bedingte Wahrscheinlichkeit aus:
$P(\text{Mädchen} \mid \text{Vielleser}) = \frac{P(\text{Mädchen und Vielleser})}{P(\text{Vielleser})} = \frac{0{,}294}{0{,}434} \approx 67{,}7\,\%$

8 *Fehlende Daten berechnen – wie geht das?*

a) Die Anzahl der Fahrschülerinnen und Fahrschüler (kurz: FS) der Schulen A und B beträgt
$0{,}64 \cdot 2532 = 1620{,}48 \approx 1620$.
Die Anzahl der Schülerinnen und Schüler an der Schule A wird mit x bezeichnet, dann hat die Schule B
$2532 - x$ Schülerinnen und Schüler.
Die Anzahl der FS an der Schule A beträgt $0{,}68 \cdot x$ und an der Schule B $0{,}55 \cdot (2532 - x)$. Die Einträge in der 2. Zeile („Kein FS") ergeben sich jeweils als Differenzen der Einträge der 3. und der 1. Zeile.

b) Die Anzahl x kann man z. B. mit Hilfe der 1. Zeile berechnen:
$0{,}68x + 0{,}55 \cdot (2532 - x) = 1620 \;\Rightarrow\; x \approx 1749$
Antwort: An der Schule A gibt es 1749 Schülerinnen und Schüler.
Bemerkung: Wenn man auf Runden der Zahlen konsequent verzichtet, ergibt sich $x \approx 1753$.

c) Der Anteil der Schülerschaft der Schule A an der Schülerschaft beider Schulen beträgt $\frac{x}{2532} \approx 0{,}69$, also ca. 69 %.