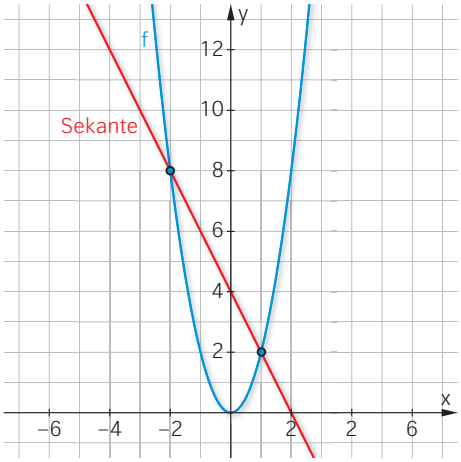
Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben

Lösungen zu Kapitel 3 Funktionen und Änderungsraten

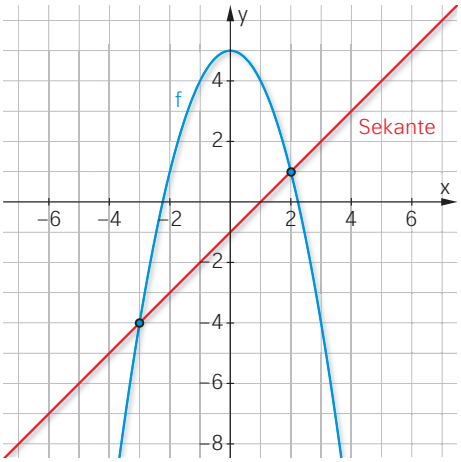
127

1 *Drei Populationen*
(1) → B; (2) → C; (3) → A.

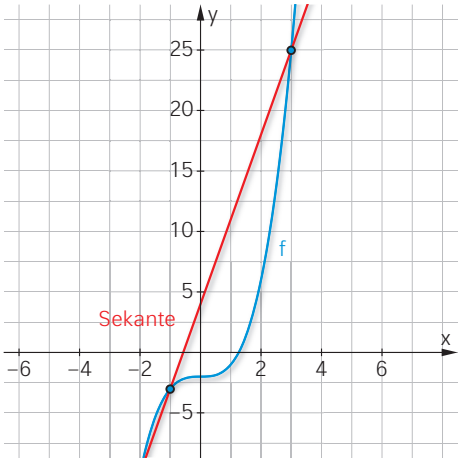
2 *Mittlere Änderungsraten – ohne GTR*
a) (A) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$



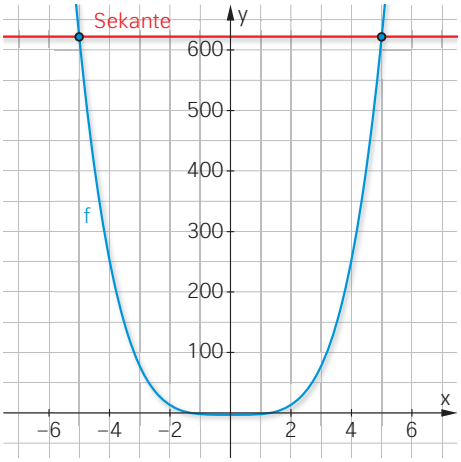
(B) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$



(C) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$



(D) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$



b) (A) $f'(x) = 4x \Rightarrow f'(-2) = -8;\ f'(1) = 4$
(C) $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = -3;\ f'(3) = 27$
(B) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-3) = 6;\ f'(2) = 4$
(D) $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(-5) = 500;\ f'(5) = 500$

3 *h-Methode*

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1{,}5(x+h)^2+3)-(1{,}5x^2+3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1{,}5(x^2+2xh+h^2)+3-1{,}5x^2-3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x+1{,}5h = 3x$$

4 *Spezielle Punkte skizzieren*
a) A beispielsweise an der Stelle $x = -3{,}5$.
b) positiv: $[-3; 0]$; negativ: $[-1; 3]$
c) D an der Stelle $x = 1$.
d) E an den Stellen $x = -1$ oder $x = 3$.
e) Beispielsweise $[-2; 0]$
f) Beispielsweise F an der Stelle $x = -1$, G an der Stelle $x = 3$.

127

5 *Funktionen untersuchen*

		$f(x) = x^4 - 2$	$f(x) = -x^3 + 4x$	$f(x) = \frac{1}{x} + 4$	$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
a)	$f'(-1)$	-4	1	-1	$1{,}08$
	$f'(3)$	108	-23	$-0{,}11$	$-1{,}98$
	$f'(1{,}5)$	$13{,}5$	$-2{,}75$	$-0{,}44$	$0{,}14$
b)	$f'(x) = 1$	$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$	$x_1 = -1;\ x_2 = 1$	–	$x_1 = 2\pi k_1 - \frac{\pi}{3};$ $x_2 = 2\pi k_2 + \frac{\pi}{3}$
	$f'(x) = -0{,}5$	$x = -\frac{1}{2}$	$x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{6};\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$	$x_1 = 2\pi k_1 - 1{,}82;$ $x_2 = 2\pi k_2 + 1{,}82$
	$f'(x) = 2$	$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{6};\ x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$	–	
c)	y-Achse	$(0\|-2);\ f'(0) = 0$	$(0\|0);\ f'(0) = 4$	–	$(0\|0);\ f'(0) = 2$
	x-Achse	$(-1{,}19\|0);$ $f'(-1{,}19) = -6{,}73$	$(-2\|0);\ f'(-2) = -8$	$(-0{,}25\|0);$ $f'(-0{,}25) = -16$	$x_k = 2\pi k$ $f'(x_k) = 2(-1)^k$
	x-Achse	$(1{,}19\|0);$ $f'(1{,}19) = 6{,}73$	$(2\|0);\ f'(2) = 4$		
d)	Tangente in P	$t_P(x) = 32x - 50$	$t_P(x) = -8x + 16$	$t_P(x) = -0{,}25x + 5$	$t_P(x) = -0{,}83x + 3{,}48$
	Normale in P	$n_P(x) = -0{,}03x + 14{,}06$	$n_P(x) = 0{,}13x + 0{,}25$	$n_P(x) = 4x - 3{,}5$	$n_P(x) = 1{,}2x - 0{,}58$
	Tangente in Q	$t_Q(x) = 108x - 245$	$t_Q(x) = -23x + 54$	$t_Q(x) = -0{,}11x + 4{,}67$	$t_Q(x) = -1{,}98x + 6{,}22$
	Normale in Q	$n_Q(x) = -0{,}01x + 79{,}03$	$n_Q(x) = 0{,}04x - 15{,}13$	$n_Q(x) = 9x - 22{,}67$	$n_Q(x) = 0{,}51x - 1{,}23$

128

6 *Begriffe erläutern*

Sekante: Gerade, die den Graphen in den beiden interessierenden Punkten schneidet.
Sekantensteigung: Steigung der Sekante; kann durch msek(x) ermittelt werden.
Differenzenquotient: gibt die Sekantensteigung an.
Tangente: Gerade, die den Graphen im interessierenden Punkt berührt.
Grenzwert des Differenzenquotienten: gibt die Tangentensteigung an.
Für $x = 3$ und $h = 0{,}1$: $m_{sek}(3) = \frac{1{,}5 \cdot 3{,}1^2 - 3^2}{0{,}1} = 9$;
Lokale Änderungsrate an der Stelle 3: $f'(3) = 9$

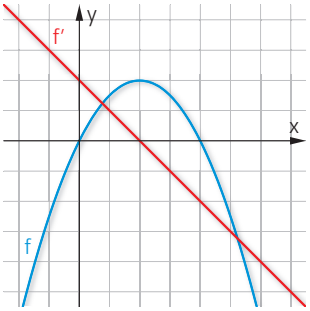
7 *Ein Zusammenhang zwischen mittlerer und lokaler Änderungsrate*

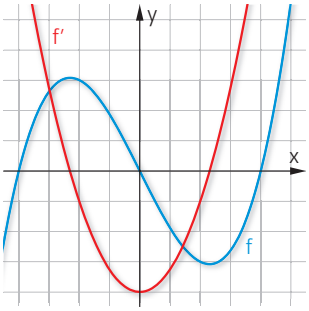
a) Die mittlere Änderungsrate von $f(x)$ im Intervall $[1;3]$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$.
Die lokale Änderungsrate lässt sich mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ bestimmen.
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h\wedge 2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4 + h) = 4$.

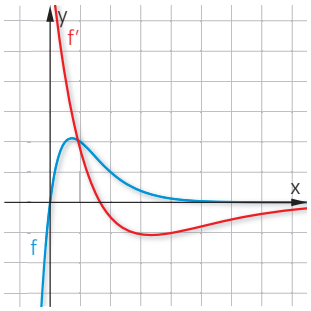
b) Die Mitte eines Intervalls $[a;b]$ lässt sich durch $\frac{a + b}{2}$ berechnen. Also folgt für die lokale Änderungsrate:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(\frac{a+b}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(a + b)h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (a + b + h) = a + b$
und für die mittlere Änderungsrate:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)} = a + b$

c) Für $f(x) = x^3$ stimmt die mittlere Änderungsrate mit der lokalen Änderungsrate in der Mitte des Intervalls beispielsweise im Intervall $[-1;1]$ nicht überein.

8 *Grafisch ableiten*

a)


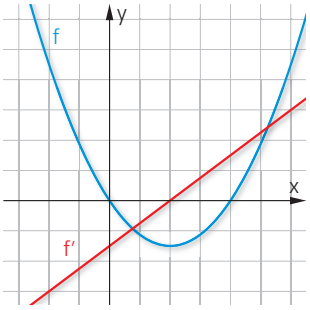
b)


c)


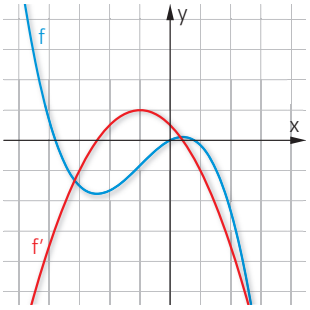
128

9 *Grafisch „aufleiten“*

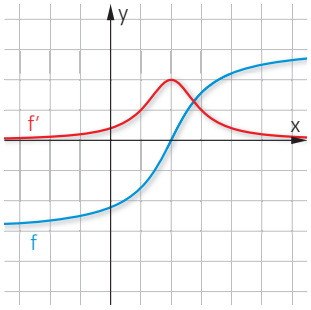
a)



b)



c)



10 *Fragen über Fragen*

a) Mit der Sekantensteigungsfunktion $m_{sek}(a)$ und einem möglichst kleinen h findet man einen guten Näherungswert für die Steigung eines Funktionsgraphen an der Stelle a.

b) Weil die Steigung konstant ist und somit sowohl der durchschnittlichen, als auch der momentanen Steigung entspricht.

c) Bei linearen oder konstanten Funktionen, beispielswiese: $f(x) = 3$ oder $f(x) = 2x - 1$

d) Die Sekantensteigungsfunktion nähert jeweils die Steigung an einer bestimmten Stelle an. Da jeder Graph unendlich viele Werte besitzt, gibt es also auch unendlich viele Sekantensteigungsfunktionen. Die Ableitungsfunktion gibt die Steigung des Graphen an jeder beliebigen Stelle x an.

11 *Wahr oder falsch?*

a) Falsch; Nachweis über Graphen $m_{sek}(x)$ mit $h = 1$.

b) Korrekt; mit $h = 2$ ist $m_{sek}(0) = \frac{h^2}{h} = h = 2$ und $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$

c) Korrekt; Nachweis über Symmetrie oder $m_{sek}(x)$ mit $x = -2$ und $h = 4$

d) Falsch; diese Formulierung ist nicht korrekt, weil sie auf ein Dividieren durch null führt.

129

12 *Änderungsraten in verschiedenen Sachzusammenhängen*

x	f(x)	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Höhe	Luftdruck in der Höhe	Durchschnittliche Luftdruckänderung mit der Höhe	Momentane Luftdruckänderung mit der Höhe
Zeit	Bakterienanzahl	Durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur	Momentane Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur
Zeit	Weg	Durchschnittsgeschwindigkeit	Momentangeschwindigkeit
Flüssigkeitsmenge	Füllhöhe einer Flüssigkeit in einem Gefäß zu einem bestimmten Zeitpunkt	Durchschnittlicher Anstieg einer Flüssigkeit in einem Gefäß	Momentaner Anstieg einer Flüssigkeit in einem Gefäß
zurückgelegter Weg	verbrauchte Benzinmenge	Durchschnittlicher Benzinverbrauch	Momentaner Benzinverbrauch
Entfernung von der Quelle eines Flusses	Höhe des Wasserspiegels über NN	Durchschnittliches Gefälle des Flusses	Momentanes Gefälle des Flusses

13 *Senkrechter Wurf*

a) Mit $h = 0{,}001$:

(1) $m_{sek}(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{20(t+h) - 5(t+h)^2 - (20t - 5t^2)}{h}$.

Da der Ball zum Zeitpunkt $t = 0$ geworfen wurde, ergibt sich: $\frac{20h - 5h^2}{h} = 20 - 5h = 19{,}995$

Der Ball wurde mit einer Geschwindigkeit von $19{,}995\,\frac{m}{s}$ abgeworfen.

(2) $m_{sek}(1) = \frac{20(1+h) - 5(1+h)^2 - (20-5)}{h} = \frac{5 + 20h - (5 + 10h + 5h^2)}{h} = \frac{10h - 5h^2}{h} = 10 - 5h = 9{,}995$

Der Ball flog nach einer Sekunde mit einer Geschwindigkeit von ca. $9{,}995\,\frac{m}{s}$.

Zunächst ist es notwendig den Zeitpunkt t zu bestimmen an dem der Ball die Höhe von 10 Metern erreicht hat.

$20t - 5t^2 = 10 \Rightarrow t^2 - 4t + 2 = 0$

pq-Formel liefert: $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ und $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$

Der Ball erreicht die 10 Meter also nach 0,59 s.

$m_{sek}(2-\sqrt{2}) = \frac{20\left((2-\sqrt{2})+h\right) - 5\left((2-\sqrt{2})+h\right)^2 - \left(20(2-\sqrt{2}) - 5(2-\sqrt{2})^2\right)}{h} = 20h - 20 + 10(2-\sqrt{2})$

Für $h = 0{,}001$ folgt: $m_{sek}(2-\sqrt{2}) = 0{,}02 + 10\sqrt{2} \approx 14{,}16$

Der Ball flog mit einer Geschwindigkeit von ca. $0{,}02 + 10\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$, als dieser 10 Meter hoch geflogen ist.

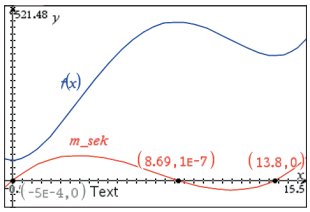
129

14 *Ein Tierbestand*

$f(x) = 0{,}1\,x^4 - 3\,x^3 + 24\,x^2 + 60;$

a) $m_{sek} = \dfrac{0{,}1\,(x+h)^4 - 3\,(x+h)^3 + 24\,(x+h)^2 + 60 - (0{,}1\,x^4 - 3\,x^3 + 24\,x^2 + 60)}{h}$

für h = 0,001 ergibt sich folgender Graph:



Die Sekantensteigungsfunktion $m_{sek}(x)$ gibt näherungsweise die Steigung der Funktion f(x) an den jeweiligen Stellen an. Der Graph von $m_{sek}(x)$ verläuft in dem Intervall [0;8,69] oberhalb der x-Achse, der Bestand der Tiere wächst innerhalb dieses Zeitraums. In dem Intervall [8,7;13,8] verläuft der Graph von $m_{sek}(x)$ unterhalb der x-Achse, der Bestand der Tiere nimmt innerhalb dieses Zeitraums ab.

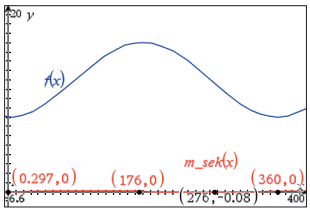
b) Zum Zeitpunkt x = 0 wächst der Bestand gar nicht.
Der Zuwachs ist zum Zeitpunkt x = 3,47 am Größten. Es befanden sich ca. 238 Tiere zu diesem Zeitpunkt im Bestand.
Die Abnahme ist bei x = 11,5 am Größten. Zu diesem Zeitpunkt befanden sich ca. 420 Tiere im Bestand.

15 *Ein Jahr in Hannover*

$f(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{180}(t-90)\right) + 12.$

a) $m_{sek} = \dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{180}(t+h-90)\right) + 12 - \left(4\sin\left(\frac{\pi}{180}(t-90)\right) + 12\right)}{h}$

Für h = 0,001 ergeben sich folgende Graphen:



Der Graph von $m_{sek}(x)$ verläuft in dem Intervall [0,297;176] oberhalb der x-Achse, die Länge der Tage wächst somit innerhalb des Zeitraums. In dem Intervall [176;360] verläuft der Graph von $m_{sek}(x)$ unterhalb der x-Achse, die Länge der tage nimmt innerhalb des Zeitraums somit ab.

b) Am Tag x = 276 ist die Abnahme der Tageslänge am Größten. Da dieser Tag im Herbst liegt, passt der Graph der Sekantensteigungsfunktion dazu.

Lösungen zu Kapitel 4 Funktionen und Ableitungen

1 *Ableitungsfunktionen*

a) $f'(x) = 0{,}6x^2 + 8x$

b) $f'(x) = -12x^3 + 12x - 2$

c) $f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-2}$

d) $f'(x) = 0{,}2 \cdot \sqrt{x} = 0{,}2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 0{,}1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 0{,}1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

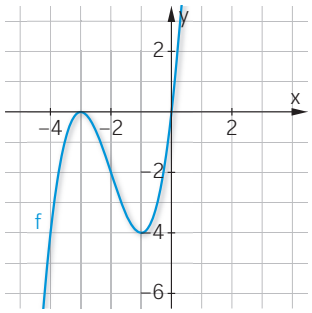
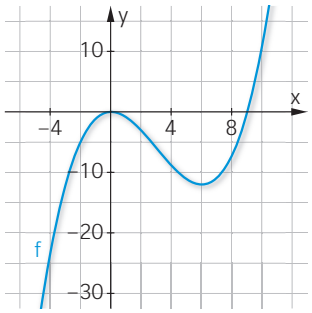
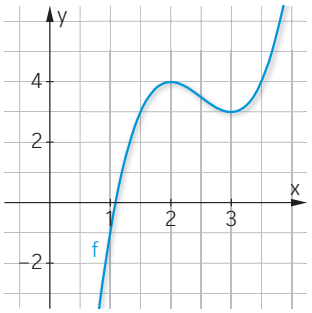
f) $f'(x) = m$

g) $f'(u) = 9u^2 - 4u$

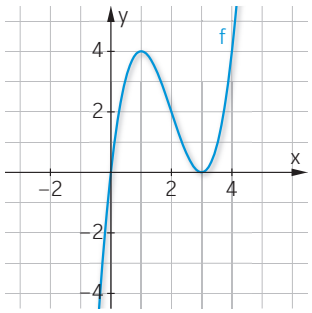
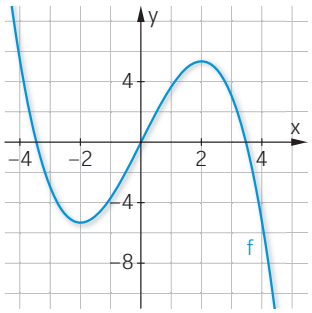
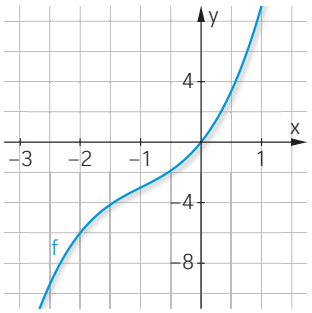
h) $A'(r) = 2\pi r$

i) $f'(x) = 3x^2 - 12$

2 *Funktionsuntersuchungen*

Funktion f(x)	a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$	b) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$	c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 24$
$f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$	$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$	$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$
$f''(x)$	$f''(x) = 6x + 12$	$f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$	$f''(x) = 12x - 30$
$f'''(x)$	$f'''(x) = 6$	$f'''(x) = \frac{2}{3}$	$f'''(x) = 12$
$S_y(0\|f(0))$	$S_y(0\|0)$	$S_y(0\|0)$	$S_y(0\|-24)$
Nullstellen: $f(x) = 0$	$x_1 = -3;\ x_2 = 0$	$x_1 = 0;\ x_2 = 9$	$x_0 \approx 1{,}09$
Extremstellen: $f'(x) = 0$	$x_{E_1} = -3;\ x_{E_2} = -1$	$x_{E_1} = 0;\ x_{E_2} = 6$	$x_{E_1} = 2;\ x_{E_2} = 3$
Extremstellen prüfen $f''(x_E) \neq 0$	$f''(-3) = -6 \Rightarrow H(-3\|0)$ $f''(-1) = 6 \Rightarrow T(-1\|-4)$	$f''(0) = -2 \Rightarrow H(0\|0)$ $f''(6) = 2 \Rightarrow T(6\|-12)$	$f''(2) = -6 \Rightarrow H(2\|4)$ $f''(3) = 6 \Rightarrow T(3\|3)$
Wendestellen: $f''(x) = 0$	$x_W = -2$	$x_W = 3$	$x_W = 2{,}5$
Wendestellen prüfen $f'''(x_E) \neq 0$	$f'''(-2) = 6 \Rightarrow W(-2\|-2)$	$f'''(3) = \frac{2}{3} \Rightarrow W(3\|-6)$	$f'''(2{,}5) = 12 \Rightarrow W(2{,}5\|3{,}5)$
Monotonie	monoton wachsend für $x < -3$ und $x > -1$ monoton fallend für $-3 < x < -1$	monoton wachsend für $x < 0$ und $x > 6$ monoton fallend für $0 < x < 6$	monoton wachsend für $x < 2$ und $x > 3$ monoton fallend für $2 < x < 3$
			

160 **3** *Funktionsuntersuchung per Hand*

Funktion f(x)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$	$h(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$
a) 1. Ableitung	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$	$g'(x) = -x^2 + 4$	$h'(x) = 3x^2 + 6x + 5$
2. Ableitung	$f''(x) = 6x - 12$	$g''(x) = -2x$	$h''(x) = 6x + 6$
3. Ableitung	$f'''(x) = 6$	$g'''(x) = -2$	$h'''(x) = 6$
y-Achsenschnittpunkt	$S_y(0\|0)$	$S_y(0\|0)$	$S_y(0\|0)$
Nullstellen: $f(x) = 0$	$x_1 = 0;\ x_2 = 3$	$x_1 = -2\sqrt{3};\ x_2 = 0;\ x_3 = 2\sqrt{3}$	$x_0 = 0$
Extremstellen: $f'(x) = 0$	$x_{E_1} = 1;\ x_{E_2} = 3$	$x_{E_1} = -2;\ x_{E_2} = 2$	keine
Extremstellen prüfen $f''(x_E) \neq 0$	$f''(1) = -6 \Rightarrow H(1\|4)$ $f''(3) = 6 \Rightarrow T(3\|0)$	$g''(-2) = 4 \Rightarrow T(-2\|-5{,}33)$ $g''(2) = -4 \Rightarrow H(2\|5{,}33)$	
Wendestellen: $f''(x) = 0$	$x_W = 2$	$x_W = 0$	$x_W = -1$
Wendestellen prüfen $f'''(x_E) \neq 0$	$f'''(2) = 6 \Rightarrow W(2\|2)$	$g'''(0) = -2 \Rightarrow W(0\|0)$	$h'''(-1) = 6 \Rightarrow W(-1\|-3)$
b) (1) monoton steigend	$x < 1;\ 3 < x$	$-2 < x < 2$	$\mathbb{R}$
(2) monoton fallend	$1 < x < 3$	$x < -2;\ 2 < x$	
(3) linksgekrümmt	$x > 2$	$x < 0$	$x > -1$
(4) rechtsgekrümmt	$x < 2$	$x > 0$	$x < -1$
c) Wendetangente	$t_W(x) = -3x + 8$	$t_W(x) = 4x$	$t_W(x) = 2x - 1$
			

4 *Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen*

Die Funktion f steigt bis zum Hochpunkt monoton. Bis zu diesem Punkt verläuft der Graph von f′(x) oberhalb der x-Achse.

Am Punkt, an dem der Graph der Funktion f den Hochpunkt erreicht, nimmt der Graph von f′(x) den Wert 0 an, da der Graph von f am Hochpunkt weder steigt, noch fällt.

Nachdem der Graph der Funktion f seinen Hochpunkt passiert hat, fällt dessen Steigung bis zum Tiefpunkt wieder. Innerhalb dieses Intervalls verläuft der Graph von f′(x) unterhalb der x-Achse. Zwischen dem Hoch- und dem Tiefpunkt des Graphen von f(x) wechselt dieser von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Dies geschieht an seinem Wendepunkt. An diesem Punkt besitzt der Graph von f′(x) ein Minimum und der Graph von f″(x) eine Nullstelle, da er die x-Achse an diesem Punkt schneidet.

161 **5** *Was ist das Besondere an der Wendestelle?*

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 6x + 4$

Um die lokalen Maxima, bzw. Minima der jeweiligen Ableitungen bestimmen zu können, müssen wir die 2. Ableitung mit 0 gleichsetzen.

$f''(x) = 0 = 6x + 4 \Rightarrow -4 = 6x \Rightarrow -\frac{2}{3} = x$

An dem Punkt $x = -\frac{2}{3}$ liegt das lokale Minimum der Ableitung, da der Graph der 2. Ableitung für $x < -\frac{2}{3}$ negative Werte und für $x > -\frac{2}{3}$ positive Werte an nimmt. Daraus lässt sich schließen, dass der Graph von f(x) an $x = -\frac{2}{3}$ von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht.

Da an diesem Punkt eine Extremstelle der 1. Ableitung vorliegt, und die 2. Ableitung das Vorzeichen wechselt, befindet sich die Wendestelle von f(x) an diesem Punkt.

b) $f(x) = -x^3 + x^2 + x$

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$f''(x) = -6x + 2;\ f''(x) = 0 = -6x + 2 \Rightarrow 2 = 6x \Rightarrow \frac{1}{3} = x$

An dem Punkt $x = \frac{1}{3}$ liegt eine Extremstelle der Ableitungsfunktion vor. Dabei handelt es sich um ein lokales Maximum, da die 2. Ableitungsfunktion für $x < \frac{1}{3}$ positive Werte und für $x > \frac{1}{3}$ negative Werte annimmt. Es befindet sich also bei $x = \frac{1}{3}$ eine Wendestelle der Funktion f, an dem der Graph von einer Links- in eine Rechtkrümmung wechselt.

161

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4$
$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$
$f''(x) = 12x^2 + 12x + 2$
$f''(x) = 0 = 12x^2 + 12x + 2 = x^2 + x + \frac{1}{6}$ ⇒ Löse mit pq-Formel: $x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$
An den Punkten $x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ und $x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ liegt jeweils eine Extremstelle der Ableitungsfunktion vor. Dabei handelt es sich bei x_1 um ein lokales Maximum und bei x_2 um ein lokales Minimum, da die 2. Ableitungsfunktion für $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ negative Werte und für alle anderen $x \in R$ positive Werte annimmt.
Es befindet sich also jeweils bei x_1 und bei x_2 eine Wendestelle der Funktion f, an denen der Graph von einer Links- in eine Rechtkrümmung bei x_1 und von einer Rechts- in eine Linkskrümmung wechselt.

6 *Lückentext*
a) Falls f an der Stelle a rechtsgekrümmt ist, dann ist $f''(a)$ negativ.
b) Falls f überall rechtsgekrümmt ist, dann ist $-f$ überall linksgekrümmt.
c) Falls $f''(x) = 0$ für alle x, dann ist der Graph von f eine Gerade.

7 *Notwendig oder hinreichend oder beides?*
a) Notwendige Bedingung: Wenn $(a|f(a))$ ein lokaler Extrempunkt von f ist, dann ist $f'(x) = 0$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer.
Beispiel:
$f(x) = 4$, $f'(x) = 0$. Hier ist die Ableitungsfunktion an jedem beliebigen $a = 0$, jedoch besitzt f keine Extremstellen.
Hinreichende Bedingung: Wenn $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) \neq 0$, dann ist $(a|f(a))$ ein lokaler Extrempunkt
b) Notwendige Bedingung: Wenn $f(x)$ eine Gerade ist, dann ist:
$f'(x)$ eine konstante Funktion
$f''(x)$ überall 0
Hinreichende Bedingung:
Wenn $f''(x)$ überall 0 ist, dann ist $f(x)$ eine Gerade.
Wenn $f'(x)$ eine konstante Funktion ist, dann ist $f(x)$ eine Gerade.

8 *Wahr oder falsch – Entscheiden mit Begründung*
a) Richtig. Jedoch gilt die Umkehrung nicht immer. Nullstellen der 2. Ableitung können auch Sattelpunkte der 1. Ableitung sein.
b) Falsch, alle monotonen Graphen besitzen keinen Extrempunkt.
c) Richtig. Der Graph muss seine Krümmungsrichtung ändern um nach einem Hochpunkt noch einen Tiefpunkt annehmen zu können.
d) Korrekt. Dies folgt aus der hinreichenden Bedingung.
e) Richtig. An einer Nullstelle sind alle Tangentensteigungen möglich.
f) Falsch, dies ist aufgrund des Verhaltens gegen $+\infty$ und $-\infty$ nicht möglich.
g) Richtig, da ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente ein Sattelpunkt ist.

9 *Passende Graphen zeichnen*
Fall (A): x^2, $(a|f(a))$ an beliebigem Punkt im 1. Quadranten
Fall (B): x^2, $(a|f(a))$ an beliebigem Punkt im 2. Quadranten
Fall (C): $-x^2$, $(a|f(a))$ an beliebigem Punkt im 3. Quadranten
Fall (D): $-x^2$, $(a|f(a))$ an beliebigem Punkt im 4. Quadranten

10 *Entscheiden und Begründen*
(1) Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$
(2) Richtig
(3) Richtig, da eine ganzrationale Funktion 3. Grades maximal 3 und minimal eine Nullstelle besitzen kann.
(4) Falsch; es ist auch ein Sattelpunkt möglich.
(5) Falsch; es ist auch ein Sattelpunkt möglich.
(6) Falsch, da f einen Wendepunkt besitzt.

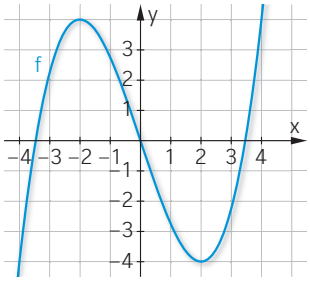
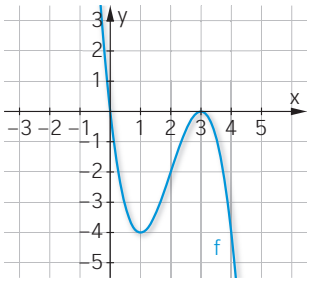
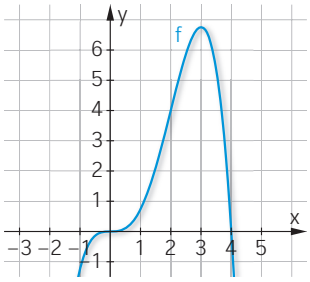
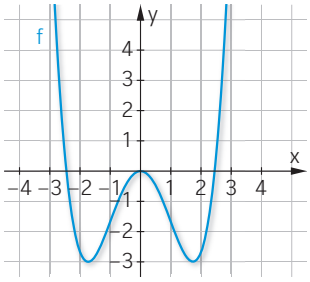
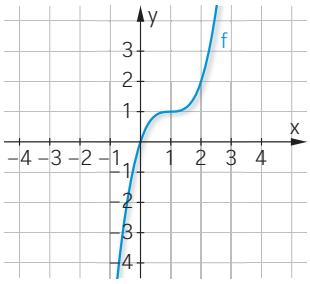
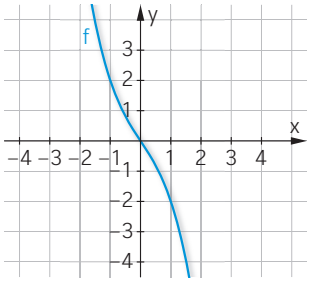
11 *Die zweite Ableitung im Alltag*
Wasserstand: Die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion nimmt negative Werte an und steigt dabei.
Temperatur: Die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion nimmt positive Werte an und steigt dabei.
Schulden: Die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion nimmt positive Werte an und fällt dabei.
Schülerzahl: Die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion ist 0.

Lösungen zu Kapitel 5 Funktionen und Anwendungen

201 **1** *Graphen begründend zuordnen*

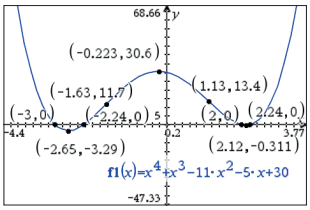
(A) $h(x) = 0{,}5x(x^2 - 1)$	Nullstellen bei -1; 0 und 1
(B) $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$	Nullstellen bei 1und doppelte Nullstelle bei -2
(C) $k(x) = 0{,}2(x - 1)^3$	dreifache Nullstelle bei 1
(D) $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$	Nullstelle bei -2 und doppelte Nullstelle bei 1

201 2 *Funktionsuntersuchungen ohne GTR*

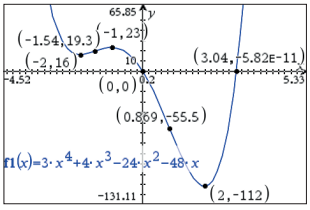
Funktion f(x)	Schnittpunkte x-Achse	Schnittpunkte y-Achse	Extrempunkte	Wendepunkte	
a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$	$(-2\sqrt{3}\,\|\,0)$; $(2\sqrt{3}\,\|\,0)$; $(0\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	$H(-2\,\|\,4)$; $T(2\,\|\,-4)$	$(0\,\|\,0)$	
b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$	$(0\,\|\,0)$; $(3\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	$H(3\,\|\,0)$; $T(1\,\|\,-4)$	$(2\,\|\,-2)$	
c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$	$(0\,\|\,0)$;$(4\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	$H(3\,\|\,\frac{27}{4})$	$(0\,\|\,0)$ Sattelpunkt; $(2\,\|\,4)$	
d) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2$	$(-\sqrt{6}\,\|\,0)$; $(\sqrt{6}\,\|\,0)$; $(0\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	$T(-\sqrt{3}\,\|\,-3)$; $T(\sqrt{3}\,\|\,-3)$; $H(0\,\|\,0)$	$(-1\,\|\,-\frac{5}{3})$; $(1\,\|\,-\frac{5}{3})$	
e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$	$(0\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	keine	$(1\,\|\,1)$,Sattelpunkt	
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 3x$	$(0\,\|\,0)$	$(0\,\|\,0)$	keine	$(0\,\|\,0)$,Sattelpunkt	

201 **3** *Funktionsuntersuchungen mit GTR*

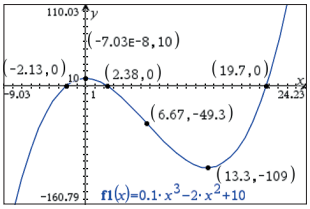
a) 4 Nullstellen; 2 Tiefpunkte, 1 Hochpunkt; 2 Wendepunkte
Die Nullstellen von f und f′ lassen sich nicht ohne Raten oder größeren Aufwand algebraisch bestimmen, da sich die beschriebenen Methoden nicht anwenden lassen.
Die Wendepunkte lassen sich einfacher algebraisch bestimmen:
$f''(x) = 12x^2 + 6x - 22 = 0 \Rightarrow 12\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{6}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{273}$
Durch Ausklammern von 12 und Anwenden der pq-Formel lassen sich die Wendestellen algebraisch bestimmen.



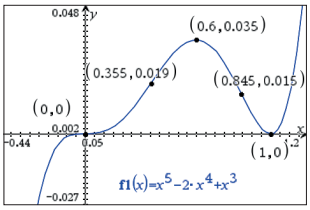
b) 2 Nullstellen; 2 Tiefpunkte, 1 Hochpunkt; 2 Wendepunkte
Die Nullstelle 0 lässt sich durch Ausklammern bestimmen. Die zweite Nullstelle kann grafisch-tabellarisch bestimmt werden (≈ 3,04). Die Nullstellen von f′ lassen sich nicht ohne Raten oder größeren Aufwand algebraisch bestimmen, da sich die beschriebenen Methoden nicht anwenden lassen.
Die Wendepunkte lassen sich einfacher algebraisch bestimmen:
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 48 = 0 \Rightarrow 36\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$
Durch Ausklammern von 36 und anwenden der pq-Formel lassen sich die Wendestellen algebraisch bestimmen.



c) 3 Nullstellen; 1 Tief-, 1 Hochpunkt; 1 Wendepunkte
Die Nullstellen von f lassen sich nicht ohne Raten oder größeren Aufwand algebraisch bestimmen, da sich die beschriebenen Methoden nicht anwenden lassen.
Die Nullstellen von $f'(x) = 0{,}3x^2 - 4x = \frac{3}{10}x\left(x - \frac{40}{3}\right)$ sind $x_{E_1} = 0$ und $x_{E_2} = \frac{40}{3}$.
Die Nullstellen von $f''(x) = 0{,}6x - 4$ ist $x_W = \frac{20}{3}$.



d) 2 Nullstellen (eine dreifach, eine doppelt); 1 Tief-, 1 Hochpunkt; 3 Wendepunkte
$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x^2 - 2x + 1) = x^3(x - 1)^2$
Die Nullstellen von f $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ lassen sich durch Ausklammern und das Anwenden der binomischen Formel bestimmen.
$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = 5x^2\left(x^2 - \frac{8}{5}x + 3\right) \Rightarrow x_{E_1} = 0;\ x_{E_2} = 1;\ x_{E_3} = \frac{3}{5};$
Die Nullstellen von f′ lassen sich durch Ausklammern von $5x^2$ und Anwenden der pq-Formel algebraisch bestimmen.
$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 20x\left(x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_{W_1} = 0;\ x_{W_{2/3}} = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{10}\sqrt{6}$
Die Nullstellen von f″ lassen sich durch Ausklammern von 20x und Anwenden der pq-Formel algebraisch bestimmen.



4 *Von der Funktion zum Graphen*

a) $f(-x) = 0{,}25(-x)^4 - 1{,}5(-x)^2 + 2 = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 + 2 = f(x)$
b) $f'(x) = x^3 - 3x;\ f'(2) = 2$
c) $f''(x) = 3x^2 - 3;\ f''(-1) = 0$ und $f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$ Q ist Wendepunkt.
$f'(-1) = 2$ und $Q(-1\,|\,0{,}75)$ wegen $t_W(x) = 2x + 2{,}75$ und $t_W(-1) = 2 \cdot (-1) + 2{,}75 = 0{,}75$ ist t_W die Tangente an den Graphen f im Punkt Q.
d) $f'(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_{E_1} = 0;\ x_{E_2} = -\sqrt{3};\ x_{E_3} = \sqrt{3};$
$f''(x_{E_1}) = f''(0) < 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
$f''(x_{E_2}) = f''(-\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ Hochpunkt
$f''(x_{E_2}) = f''(\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

5 *Vom Graphen zur Funktionsgleichung*

a) $f(x) = x(x - 3)^2$ b) $f(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$ c) $f(x) = (x + 4)x^3$

202 **6** *Geraden, Parabeln und ein Polynom vom Grad 3*

a) $f_{AB}(x) = f_{AD}(x) = f_{BD}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$
$f_{AC}(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$
$f_{BC}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$f_{CD}(x) = -3x + 10$
b) $f_{ABC}(x) = 0{,}23x^2 - 0{,}43x + 0{,}2$
$f_{ABD}(x)$ ist keine Parabel
$f_{ACD}(x) = -0{,}47x^2 + 0{,}27x + 4{,}4$
$f_{BCD}(x) = -1{,}17x^2 + 5{,}17x - 4$
c) $f_{ABCD}(x) = -0{,}23x^3 + 0{,}7x^2 + 0{,}73x - 1{,}2$

202

7 *Ein optimaler Quader*

a) a: Seitenlänge der quadratischen Grundfläche des Quaders in cm
b: Höhe des Quaders in cm. Zielfunktion: $V = a^2 \cdot b$
Nebenbedingung: $O = 24$; $24 = 2a^2 + 4ab \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}a + \frac{6}{a}$
Einsetzen von b in die Zielfunktion: $V(a) = -\frac{1}{2}a^3 + 6a$
Extremwertbestimmung: $V'(a) = -\frac{3}{2}a^2 + 6$; $V'(a) = 0 \Rightarrow a_1 = -2$; $a_2 = 2$
Nur a_2 ist sinnvoll im Sinne der Aufgabenstellung.
Da $V'(a)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, liegt für a_2 ein Maximum vor.
Einsetzen von $a = 2$ in $b = -\frac{1}{2}a + \frac{6}{a}$ ergibt $b = 2$; die ideale Form ist also ein Würfel mit der Seitenlänge 2 cm.

b) Wiederholt man die Rechenschritte aus a) mit allgemeinem O, so erhält man als ideale Seitenlänge $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$.
Setzt man diesen Wert ein, so erhält man $b = \sqrt{\frac{O}{6}}$.
Die ideale Form ist also immer ein Würfel mit Seitenlänge $\sqrt{\frac{O}{6}}$ cm.

8 *Extremale Dreiecke*

a) Der Flächeninhalt berechnet sich mit $g(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2$.
Der Graph von g hat einen Hochpunkt bei $x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, dort wird der Flächeninhalt mit $g(2{,}67) \approx 4{,}74$ maximal.

b) Der Flächeninhalt berechnet sich mit $g(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = -0{,}5x^4 + 4{,}5x^2$.
Der Graph von g hat einen Hochpunkt bei $x = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12$, dort wird der Flächeninhalt mit $g(2{,}12) \approx 10{,}13$ maximal.

9 *Eigenschaften von Funktionsgraphen*

a) Waagerechte Tangente: $f'(x) = 0$; linksgekrümmt: $f''(x) > 0$
b) Wendepunkt allgemein; Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente); evtl. Unterscheidung in Übergang von Links- in Rechtskrümmung oder umgekehrt
c) Nein, da das Krümmungsverhalten zwischen Hoch- und Tiefpunkt wechseln muss. Die Anzahl der Wendepunkte dazwischen ist also immer ungerade.
d) An welchen Stellen der Funktion f liegt ein Extremum oder ein Sattelpunkt vor oder handelt es sich um eine konstante Funktion?
e) Ja, z. B. $f(x) = x^4$.
f) Bei $f(x) = x^3$ tangiert und schneidet die Tangente den Graphen in 0. Die Aussage trifft jedoch für alle Tangenten an den Graphen von $f(x) = x^2$ zu.

10 *Funktion gesucht*

a) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit den genannten Nullstellen hat zwei Extrema. Eines zwischen -2 und -1, das andere zwischen -1 und 4.
b) Die Funktion hat die Form $f(x) = c \cdot (x+1)(x+2)(x-4) = c \cdot (x^3 - x^2 - 10x - 8)$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
$f'(x) = 3cx^2 - 2cx - 10c$; $f'(x) = 0$ setzten: $3cx^2 - 2cx - 10c = 3c \cdot \left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\right) = 0$
$\Rightarrow x_{E_1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{31} \approx -1{,}52$; $x_{E_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{31} \approx 2{,}19$
c) Nein, denn eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit den genannten Nullstellen hat die Form
$f(x) = c \cdot (x+1)(x+2)(x-4) = c \cdot (x^3 - x^2 - 10x - 8)$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Da c variabel ist, lassen sich die Funktionswerte der Stellen nicht bestimmen.
d) Beispiele: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)(x+2)(x-4) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4$
$f(x) = -1 \cdot (x+1)(x+2)(x-4) = -x^3 + x^2 + 10x + 8)$

11 *Ein seltsamer Graph – vom Graph zur Funktion*

a) Von links nach rechts: Der Graph kommt im IV. Quadranten aus dem positiven Unendlichen und hat zwischen den Nullstellen bei $x = -2$ und $x = -1$ ein Minimum, gefolgt von einem Wendepunkt. Bei $x = -1$ folgt ein Sattelpunkt. Danach durchläuft der Graph einen weiteren Wendepunkt und anschließend seinen Hochpunkt auf der y-Achse. Aufgrund der Tatsache, dass der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wiederholt sich die eben beschriebene Situation entsprechend im I. Quadranten.
b) Da die Funktion sechs Wendestellen aufweist, hat sie mindestens Grad 8.
c) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^3(x-2)(x+2)$

203

12 *Begründungen*

a) (1) $f'(x) = 3x^2 + a > 0$ für alle rellen Zahlen, wenn $a > 0$ ist.
(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) = 0$ für $x = 0$ oder $x = -\frac{2}{3}a$.
$f''(x) = 6x + 2a$ ungleich null für $x = 0$ oder $x = -\frac{2}{3}a$.
b) Die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 besitzt den Grad 2. Da diese Funktion nur zwei Nullstellen besitzen kann, wechselt das Vorzeichen der Funktionswerte nur zweimal. Der Graph von f kann folglich nur zwei Wendepunkte besitzen. Für einen Graphen mit zwei Sattelpunkten muss die Krümmung aber mindestens dreimal wechseln.

13 *Regression und Interpolation*

a) Lineare Regression: $f_{lin}(x) = \frac{3}{20}x + \frac{16}{5} \approx 0{,}15x + 3{,}2$

Quadratische Regression: $f_{quad}(x) = -\frac{1}{56}x^2 + \frac{41}{140}x + \frac{107}{35} \approx -0{,}02x^2 + 0{,}3x + 3{,}06$

Kubische Regression: $f_{kub}(x) = -\frac{1}{96}x^3 + \frac{3}{28}x^2 - \frac{11}{168}x + \frac{221}{70} \approx -0{,}01x^3 + 0{,}11x^2 - 0{,}07x + 3{,}16$

Interpolation: $f_{int}(x) = -\frac{11}{384}x^4 + \frac{43}{96}x^3 - \frac{205}{96}x^2 + \frac{77}{24}x + 3 \approx -0{,}03x^4 + 0{,}45x^3 - 2{,}14x^2 + 3{,}21x + 3$

b) Prognose für $x = 10$:

Lineare Regression: $f_{lin}(10) = 4{,}7$ Quadratische Regression: $f_{quad}(10) = 4{,}2$

Kubische Regression: $f_{kub}(10) = 2{,}8$ Interpolation: $f_{int}(10) = -17$

Lineare und quadratische Regression unterscheiden sich für $x = 10$ wenig, die kubische Regression weicht stärker, die Interpolation weicht sehr stark von den Regressionen ab.

c) Bei der Regression wird versucht den Abstand des Graphen der Funktion eines vorgegebenen Funktionstyps zu allen Punkten im Mittel möglichst zu minimieren. Bei der Interpolation werden immer einige oder alle Punkte ausgewählt, die auf dem Graphen der Funktion liegen sollen.

14 *Das isoperimetrische Problem und seine Umkehrung*

a) Rechteck mit festem Umfang u und der Seitenlänge x. Die zweite Seitenlänge ist dann $\frac{1}{2}u - x$.

Flächeninhalt: $f(x) = x \cdot (\frac{1}{2}u - x) = \frac{1}{2}ux - x^2$

Extremwert: $f'(x) = \frac{1}{2}u - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}u$

Damit sind die beiden Seiten gleich lang, folglich ist das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ein Quadrat.

b) Hier wird umgekehrt der Flächeninhalt vorgegeben und der Umfang minimiert.

Rechteck mit festem Flächeninhalt $A = 40\,cm^2$ und der Seitenlänge x. Die zweite Seitenlänge ist dann $\frac{40}{x}$.

Umfang: $u(x) = 2(x + \frac{40}{x}) = 2x + 80x^{-1}$

Extremwert: $u'(x) = 2 - 80x^{-2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{40} \approx 6{,}32$; da für Seitenlängen $x > 0$ gilt.

$u''(x) = 160x^{-3} > 0$ für $x > 0$.

Damit sind beide Seitenlängen gleich lang und folglich ist das Rechteck mit dem kleinsten Umfang ein Quadrat.

Rechteck mit festem Flächeninhalt A und der Seitenlänge x. Die zweite Seitenlänge ist dann $\frac{A}{x}$.

Umfang: $u(x) = 2(x + \frac{A}{x}) = 2x + 2Ax^{-1}$

Extremwert: $u'(x) = 2 - 2Ax^{-2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{A}$, da für Seitenlängen $x > 0$ gilt.

$u''(x) = 4Ax^{-3} > 0$ für $x > 0$ und $A > 0$.

Damit sind beide Seitenlängen gleich lang und folglich ist das Rechteck mit dem kleinsten Umfang ein Quadrat.

15 *Stadion*

Der Flächeninhalt A des rechteckigen Fußballplatzes wird durch $A = a \cdot 2r$ beschrieben, wobei r der Radius der beiden Halbkreise ist und a die Länge der geraden Strecke (jeweils gemessen in Meter). Aus der Bedingung $400 = 2\pi r + 2a$ ergibt sich $a = 200 - \pi r$. Eingesetzt in A erhalten wir $A = 400r - 2\pi r^2$. Der Graph von $A(r)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, er hat also ein Maximum, das wir über die Ableitung von $A(r)$ bestimmen. $A' = 400 - 4\pi r$. Für $r = \frac{400}{4\pi}$ ist $A' = 0$ $\Rightarrow r = 31{,}83\,m$. Damit errechnen wir $a = 100\,m$. Das ist genau die Länge, der in allen Sportstadien der Welt vorhandenen 100-m-Sprintstrecke. Für das maximal mögliche Fußballfeld ergibt sich $A = 2 \cdot 31{,}83 \cdot 100 = 6366$, also $6366\,m^2$.

16 *Abzäunen*

Bezeichnet man die Seite parallel zum Fluss mit y und den Abstand von y zum Fluss mit x, ergeben sich folgende Gleichungen: Preis: $3 \cdot 5 \cdot x + 6 \cdot y = 1500 \Rightarrow x = 100 - \frac{6}{15}y$

Flächeninhalt: $A(y) = x \cdot y = 100y - \frac{6}{15}y$; $A'(y) = 0 \Rightarrow y = 125 \Rightarrow x = 50$