1

GRUNDLAGEN DER MECHANIK

Erhaltung der Energie

Energie und ihre Eigenschaften

- Die **Energie *E*** ist die Fähigkeit eines Systems, Körper zu bewegen oder zu verformen, Wärme abzugeben oder Strahlung auszusenden.
  Einheit: 1 J (Joule) = 1 Nm = 1 Ws
- In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie stets erhalten, d. h. die Summe aller Energien (verschiedene Energieformen) ist konstant (**Gesetz zur Erhaltung der Energie**).
  $$E_{ges} = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i = \text{konstant}$$
- Energie kann in **Energieträgern** wie Brenn- und Treibstoffen, gehobenen oder bewegten Körpern oder Batterien gespeichert und transportiert werden.
- Energie kann durch mechanische Arbeit, Wärme, Strahlung oder elektrischen Strom von einem System zum anderen übertragen bzw. in andere Energieformen **umgewandelt** werden.
- Energie kann **entwertet** werden, also in eine Energieform umgewandelt werden, die nicht mehr nutzbar ist.

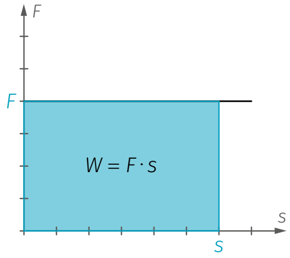
Übertragung von Energie durch mechanische Arbeit

- **Mechanische Arbeit *W*** wird verrichtet, wenn ein System bzw. ein Körper durch eine Kraft *F* bewegt oder verformt wird.
  Einheit: 1 Nm = 1 Ws = 1 J
- Durch die mechanische Arbeit wird der Prozess der **Energieübertragung** beschrieben:
  $W = \Delta E$.
- Unter der Bedingung, dass eine konstante Kraft *F* in Richtung des zurückgelegten Weges *s* wirkt, kann die mechanische Arbeit *W* berechnet werden.
  $W = F \cdot s$

Abi Tipp

INTERPRETATION s-F-DIAGRAMME

Trägt man die wirkende Kraft F in einem Diagramm über dem zurückgelegten Weg s auf, dann ist die **Fläche unter dem Graphen** ein Maß für die verrichtete Arbeit W.



Dieser Zusammenhang gilt auch, wenn die wirkende Kraft F nicht zeitlich konstant ist.

Abi Tipp

KRAFT ALS VEKTOR

Die Kraft F ist eine vektorielle Größe.
Sie besitzt stets einen Betrag (Stärke der Kraft) und eine Richtung.

Hubarbeit und potentielle Energie

- Aufgrund der Massenanziehung der Erde wird jeder Körper der Masse m mit einer **Gewichtskraft F_G** angezogen, abhängig vom der geltenden Fallbeschleunigung (auch: Ortsfaktor) g.
  $\boldsymbol{F_G = m \cdot g}$
  Auf der Erdoberfläche gilt ein durchschnittlicher Wert von
  $\boldsymbol{g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 9{,}81\,\frac{N}{kg}}$.
- Wird ein Körper um die Höhe h gehoben, dann wird an ihm **Hubarbeit W_H** verrichtet.
  Die dem Körper dabei zugeführte **potentielle Energie E_{pot}** (Lageenergie) berechnet sich dann mit:
  $\boldsymbol{W = \Delta E = E_{pot} = F_G \cdot s = m \cdot g \cdot h}$

Abi Tipp

FESTLEGUNG EINER BEZUGSHÖHE

Die gesamte potentielle Energie des Körpers hängt dabei von der Bezugshöhe ($h = 0$) ab.

Diese kann abhängig vom Sachverhalt beliebig gewählt werden. Oft wird die Erdoberfläche als Bezugshöhe gewählt.

Beispielaufgabe: Potentielle Energie

Ermitteln Sie die potentielle Energie eines Wasserglases der Masse 250 g, das auf einem 85 cm hohen Tisch steht.

Lösung:
Da in der Aufgabe keine Bezugshöhe angegeben ist, gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten.

Variante 1
Als Bezugshöhe $(h = 0)$ wird der Fußboden gewählt, und das Wasserglas hat dann eine potentielle Energie von
$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 0{,}25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0{,}85\,\text{m} = 2{,}1\,\text{Nm} = 2{,}1\,\text{J}$
Wenn das Wasserglas vom Fußboden auf den Tisch gehoben werden soll, ist eine Hubarbeit von $W_{Hub} = 2{,}1\,\text{J}$ notwendig.

Variante 2
Als Bezugshöhe wird die Tischplatte gewählt, und das Wasserglas hat dann annähernd die potentielle Energie von null.

Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie

- Wirkt auf einen Körper der Masse m eine konstante Kraft F in Bewegungsrichtung, dann wird er in diese Richtung mit einer Beschleunigung a beschleunigt.
  $\boldsymbol{F = m \cdot a}$ **(Newton'sches Grundgesetz)**
- Es wird **Beschleunigungsarbeit $\boldsymbol{W_B}$** am Körper verrichtet und dem Körper wird dabei Energie in Form von **kinetischer Energie $\boldsymbol{E_{kin}}$** (Bewegungsenergie) zugeführt.
  $\boldsymbol{W_B = \Delta E = E_{kin} = F \cdot s}$
  Mit $s = \frac{v^2}{2a}$ (siehe S. 16) für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen kann die kinetische Energie des Körpers berechnet werden.
  $\boldsymbol{E_{kin} = F \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$

Abi Tipp

BEACHTUNG DER ANFANGSGESCHWINDIGKEIT

Analog zur potentiellen Energie bezieht sich oben die kinetische Energie wieder auf eine Anfangsgeschwindigkeit von $v = 0$.
Zu $W_B = \Delta E$ muss die anfängliche kinetische Energie $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ addiert werden.

Beispielaufgabe: Kinetische Energie

Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
In dem Zug läuft ein Fahrgast ($m = 70\,\text{kg}$) in Fahrtrichtung mit einer Geschwindigkeit von $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zur Toilette.
Berechnen Sie die kinetische Energie des Fahrgastes.

Lösung:
In der Aufgabenstellung ist kein Bezugsobjekt gegeben.
Daher gibt es auch hier zwei verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

Variante 1
Bezüglich des Zuges bewegt sich der Fahrgast mit $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und besitzt daher eine kinetische Energie von

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 70\,\text{kg} \cdot \left(2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 140\,\text{J}$$

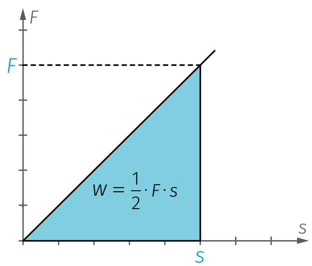
Variante 2
Bezüglich der Erdoberfläche außerhalb des Zuges bewegt sich der Fahrgast mit $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und besitzt daher eine viel höhere kinetische Energie von

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 70\,\text{kg} \cdot \left(18{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 12{,}2\,\text{kJ}$$

Um den Fahrgast in Variante 2 aus der Ruhe heraus auf seine Geschwindigkeit von $18{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigen zu können, wäre eine Beschleunigungsarbeit von $W_{\text{B}} = 12{,}2\,\text{kJ}$ notwendig.

Verformungsarbeit und Spannenergie

- Für eine elastische Feder mit der **Federkonstante *D***, die um eine Strecke *s* gedehnt wird, gilt das HOOKE'sche Gesetz.
  $\boldsymbol{F = D \cdot s} \quad [\text{D}] = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$
  Die Federkonstante gibt an, welche Kraft notwendig ist, um eine Feder um die jeweilige Strecke *s* zu dehnen.



- Beim Spannen einer elastischen Feder ist die erforderliche Kraft *F* nicht konstant, sie nimmt proportional mit der Dehnung *s* zu.
  Daher ist $\boldsymbol{W = F \cdot s}$ nicht anwendbar. Für die verrichtete Arbeit gilt:
  $\boldsymbol{W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s}$.

- Beim Spannen einer Feder wird an dieser **Spannarbeit W_{spann}** verrichtet. Die dabei zugeführte Energie wird in der Feder als **Spannenergie E_{spann}** gespeichert.
  $\boldsymbol{E_{spann} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2}$

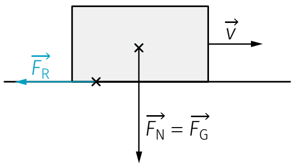
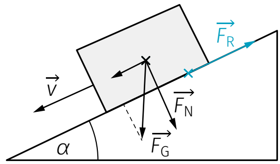
Beispielaufgabe: Spannenergie

Hängt man ein Masse von 250 g an eine elastische Feder, so dehnt sich diese um 4,5 cm.
Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie und die Federhärte der elastischen Feder.

Lösung:
Die Kraft, durch die die Feder gespannt wird, ist die Gewichtskraft der Masse, also
$F = F_G = m \cdot g = 0{,}25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 2{,}45\,\text{N}$
Damit ergibt sich für die Spannenergie
$E_{spann} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}45\,\text{N} \cdot 0{,}045\,\text{m} = 0{,}055\,\text{J}$
die in der Feder gespeichert ist.
Für die Dehnung der elastischen Feder um 4,5 cm verrichtet die Masse an der Feder eine Spannarbeit $W_{spann} = 0{,}055\,\text{J}$.
Für die Federkonstante erhält man entweder durch Umstellen von
$E_{spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$ mit $D = \frac{2 \cdot E_{spann}}{s^2} = \frac{2 \cdot 0{,}055\,\text{J}}{(0{,}045\,\text{m})^2} = 54{,}3\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$
oder mit $D = \frac{F}{s} = \frac{2{,}45\,\text{N}}{0{,}045\,\text{m}} = 54{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

Reibung, Reibungsarbeit und Energieentwertung

- **Reibungskräfte** sind stets so gerichtet, dass sie der Bewegung entgegenwirken und sie hemmen.
  Reibung führt zur Verringerung der mechanischen Energie eines Systems und zu einer Erwärmung der Umwelt (Energieentwertung).
- Man unterscheidet **Haftreibung, Gleitreibung** und **Rollreibung**.
  Die Art der Reibung hat Einfluss auf die **Reibungszahl (Reibungskoeffizient) $\boldsymbol{\mu}$**, die ein dimensionsloses Maß für die Reibungskraft im Verhältnis zur Normalkraft zwischen zwei Körpern ist.
- Die **Normalkraft $\boldsymbol{F_N}$** bezeichnet die Kraftkomponente der Gewichtskraft F_G, die senkrecht zur Unterlage wirkt.

<table>
<tr><th>horizontale Ebene</th><th>schiefe Ebene</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die Normalkraft ist hier die Gewichtskraft $\boldsymbol{F_G}$.
$\boldsymbol{F_N = F_G = m \cdot g}$</td><td>Die Normalkraft ist hier eine Komponente der Gewichtskraft $\boldsymbol{F_G}$.
$\boldsymbol{F_N = F_G \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}$</td></tr>
</table>

- Die **Reibungskraft $\boldsymbol{F_R}$** kann mit der Normalkraft und der Reibungszahl μ berechnet werden.
  $\boldsymbol{F_R = \mu \cdot F_N}$

Beispielaufgabe: Vergleich Reibungskräfte

Ein Körper der Masse 40 kg soll auf Betonboden (Gleitreibungskoeffizient 0,6) gleiten.
Vergleichen Sie die Reibungskräfte auf den Körper bei einer Bewegung auf einer horizontalen Ebene mit der auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von 30°.

Lösung:
Auf der horizontalen Ebene $(F_N = F_G)$ gilt für die Reibungskraft
$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}6 \cdot 40\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 235{,}4\,\text{N}.$
Auf der schiefen Ebene gilt für die Reibungskraft
$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos(\alpha)$
$F_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0{,}6 \cdot 40\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \cos(30°) = 203{,}9\,\text{N}.$
Die Reibungskraft auf der schiefen Ebene ist kleiner als die auf einer horizontalen Unterlage.

Beispielaufgabe: Anwendung des Energieerhaltungssatzes (1)

Ein Kind auf einem Schlitten (Gesamtmasse 45 kg) startet von einem Rodelhang aus 15 m Höhe aus der Ruhe heraus und erreicht am Fuße des Hangs eine Geschwindigkeit von $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Ermitteln Sie rechnerisch, welchen Energiebetrag das Kind mit dem Schlitten beim Rodeln durch Reibung „verloren" hat.

Lösung:
Zu Beginn besitzt das System (Kind auf dem Schlitten) nur potentielle Energie, die beim Rodeln nach unten in kinetische Energie und Reibungsenergie umgewandelt wird.
Für die potentielle Energie ergibt sich
$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h = 45\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 15\,\text{m} = 6621{,}75\,\text{J}$
Die kinetische Energie des Systems am Fuße des Hangs beträgt
$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 45\,\text{kg} \cdot \left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 3240\,\text{J}$
Die Differenz der beiden Energiebeträge gibt die Energie an, die durch Reibung „verloren gegangen" ist.
$E_{\text{pot}} - E_{\text{kin}} = 6621{,}75\,\text{J} - 3240\,\text{J} = 3381{,}75\,\text{J}$

Beispielaufgabe: Anwendung des Energieerhaltungssatzes (2)

Ein Pkw $(m = 1200\,\text{kg})$ prallt mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegen eine Mauer.
Berechnen Sie die kinetische Energie des Pkw.
Ermitteln Sie, aus welcher Höhe der Pkw frei fallen müsste, um beim Aufprall auf dem Boden den gleichen Energiebetrag in Form von kinetischer Energie zu besitzen.

Lösung:
Für die kinetische Energie ergibt sich mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}89\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Umrechnung siehe S. 13):
$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200\,\text{kg} \cdot \left(13{,}89\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 115{,}7\,\text{kJ} = 0{,}115\,\text{MJ}$
Für die Höhe ergibt sich mit dem Ansatz $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ und Umstellen nach der Höhe $\text{h} = \frac{E_{\text{kin}}}{m \cdot g} = \frac{0{,}115 \cdot 10^6\,\text{J}}{1200\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 9{,}77\,\text{m}$
Der Pkw müsste aus einer Höhe von 9,77 m fallen.